

Introduction aux matrices aléatoires

Djalil CHAFAÏ

U. Paris-Est Marne-la-Vallée

Journées X-UPS
15–16 avril 2013
Palaiseau, France

Plan de l'exposé

1 En guise d'apéritif

Plan de l'exposé

- 1 En guise d'apéritif
- 2 Quelques aspects historiques

Plan de l'exposé

- 1 En guise d'apéritif
- 2 Quelques aspects historiques
- 3 Trois phénomènes d'universalité

Plan de l'exposé

- 1 En guise d'apéritif
- 2 Quelques aspects historiques
- 3 Trois phénomènes d'universalité
- 4 Esquisses de preuves du théorème de Wigner

Plan de l'exposé

- 1 En guise d'apéritif
- 2 Quelques aspects historiques
- 3 Trois phénomènes d'universalité
- 4 Esquisses de preuves du théorème de Wigner
- 5 Probabilités libres de Voiculescu

Plan de l'exposé

- 1 En guise d'apéritif
- 2 Quelques aspects historiques
- 3 Trois phénomènes d'universalité
- 4 Esquisses de preuves du théorème de Wigner
- 5 Probabilités libres de Voiculescu
- 6 Quelques mots sur Marchenko-Pastur et Girko

Modèle fétiche

- Matrices de permutations aléatoires

Modèle fétiche

- Matrices de permutations aléatoires
- Loi d'Ewens (restaurants chinois) $n = n_1 + 2n_2 + \dots + nn_n$

$$\mathbb{P}(N_1(\sigma) = n_1, \dots, N_n(\sigma) = n_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n n_i! i^{n_i}}.$$

Modèle fétiche

- Matrices de permutations aléatoires
- Loi d'Ewens (restaurants chinois) $n = n_1 + 2n_2 + \dots + nn_n$

$$\mathbb{P}(N_1(\sigma) = n_1, \dots, N_n(\sigma) = n_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n n_i! i^{n_i}}.$$

- Loi uniforme sur le cercle unité:

$$\frac{\text{card}\{1 \leq k \leq n : \lambda_k(\mathbf{P}) \in \text{arc}\}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Longueur}(\text{arc})}{2\pi}.$$

Modèle fétiche

- Matrices de permutations aléatoires
- Loi d'Ewens (restaurants chinois) $n = n_1 + 2n_2 + \dots + nn_n$

$$\mathbb{P}(N_1(\sigma) = n_1, \dots, N_n(\sigma) = n_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n n_i! i^{n_i}}.$$

- Loi uniforme sur le cercle unité:

$$\frac{\text{card}\{1 \leq k \leq n : \lambda_k(P) \in \text{arc}\}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Longueur}(\text{arc})}{2\pi}.$$

- Matrice d'adjacence de graphe d -régulier $P_1 + \dots + P_d$

Modèle fétiche

- Matrices de permutations aléatoires
- Loi d'Ewens (restaurants chinois) $n = n_1 + 2n_2 + \dots + nn_n$

$$\mathbb{P}(N_1(\sigma) = n_1, \dots, N_n(\sigma) = n_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n n_i! i^{n_i}}.$$

- Loi uniforme sur le cercle unité:

$$\frac{\text{card}\{1 \leq k \leq n : \lambda_k(P) \in \text{arc}\}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Longueur}(\text{arc})}{2\pi}.$$

- Matrice d'adjacence de graphe d -régulier $P_1 + \dots + P_d$
- Conjecture de Kesten-McKay orientée:

$$\frac{d^2(d-1)}{(d^2 - |z|^2)^2} \mathbf{1}_{\{|z| < \sqrt{d}\}} dx dy.$$

Matrices aléatoires

Algèbre linéaire \cup Probabilités

Statistique mathématique \approx 1920–30



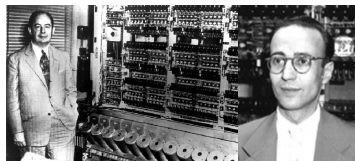
John Wishart (1898–1956)

- X_1, \dots, X_n vecteurs aléatoires i.i.d. de \mathbb{R}^d
- Échantillon de loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \Sigma)$
- Matrice de covariance empirique

$$\hat{\Sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)(X_i - m)^\top = \frac{1}{n} Y Y^\top$$

- Loi du spectre de $\hat{\Sigma}_n$
- Analyse en Composantes Principales (ACP)

Informatique et analyse numérique \approx 1940–50



John von Neumann (1903–1957) et Herman Goldstine (1913–2004)

■ Conditionnement de matrices aléatoires

$$\kappa(\mathbf{A}) := \frac{\lambda_{\max}(\sqrt{\mathbf{M}\mathbf{M}^*})}{\lambda_{\min}(\sqrt{\mathbf{M}\mathbf{M}^*})} \approx \sqrt{n}$$

■ « Smoothed analysis of algorithms » (Spielman & Teng)

$$\mathbb{P}(\lambda_{\min}(\sqrt{\mathbf{M}\mathbf{M}^*}) \leq t) \leq t + c^n.$$

Physique atomique \approx 1950–60



Eugene Wigner (1902–1995), Madan Mehta (1932–2006), Freeman Dyson (1923–)

- Écarts entre niveaux d'énergie des noyaux atomiques
- Mécanique quantique : équation de Schrödinger
- Mesures \leftrightarrow spectre opérateur hermitien
- Mécanique statistique : lois de Boltzmann-Gibbs
- $\frac{1}{n} \text{card}\{1 \leq k \leq n : \lambda_k(M + M^*) \in I\} \rightarrow$ loi du demi-cercle
- $n(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \rightarrow$ loi de Gaudin-Mehta

Phénomène de localisation \approx 1950–60



Philip Warren Anderson (1923–)

- Impuretés aléatoires dans un semi-conducteur
- Localisation des électrons
- Opérateur de Schrödinger aléatoire $\Delta + V$
- Vecteurs propres des matrices bandes

Résolvante et loi de Marchenko-Pastur \approx 1960



Vladimir Marchenko (1922-) et Leonid Pastur (1937-), Vyacheslav Girko (1946-)

- Spectres d'opérateurs aléatoires en grande dimension
- Spectre de $\frac{1}{n}MM^*$ où M est $d \times n$ avec $d/n \rightarrow \rho$
- Matrices de covariance empirique !
- Résolvante et transformée de Cauchy-Stieltjes

Statistique et analyse numérique \approx 1980-1990



Zhidong Bai, Jack Silverstein, Alan Edelman

- Méthodologies : Stieltjes, troncature, décompositions, ...
- Modèles : modèles i.i.d. versus modèles invariants
- Statistique et analyse numérique

Loi de Tracy-Widom et noyau d'Airy \approx 1990



Harold Widom (1932-) et Craig Tracy (1945-)

- Fluctuation: $n^{2/3}(\lambda_{\max}(M + M^*) - 2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu_{\text{TW}}$
- ÉDO de Painlevé de type II et fonction d'Airy

$$F(t) = \exp\left(-\int_t^\infty (x-t)^2 q^2(x) dx\right)$$

$$q''(x) = xq(x) + 2q(x)^3, \quad q(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \text{Ai}(x), \quad y'' = xy$$

Probabilités libres \approx 1990



Dan-Virgil Voiculescu (1949–)

■ Grandes matrices aléatoires \leftrightarrow algèbre d'opérateurs

Probabilités classiques	Probabilités libres
Variable aléatoire	Élément d'algèbre
Espérance	Trace normalisée
Moments	Moments
Indépendance	Liberté
Loi de Gauss	Loi du demi-cercle

Développements actuels \approx 2000–2010



Ben Schlein, László Erdős, Horng-Tzer Yau, Van Vu, Terence Tao, Mark Rudelson, Roman Vershynin, Alice Guionnet

- Universalité globale versus locale
- Universalité au premier ordre versus au second ordre
- Analyse asymptotique versus quantitative

Universalité

- $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. moyenne m variance σ^2

Universalité

- $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. moyenne m variance σ^2
- Loi des grands nombres: presque sûrement,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Universalité

- $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. moyenne m variance σ^2
- Loi des grands nombres: presque sûrement,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

- Théorème central limite: pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right) \in I\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(I) = \int_I \gamma(x) dx$$

où μ est la loi de Gauss de moyenne 0 et de variance σ^2

Universalité

- $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. moyenne m variance σ^2
- Loi des grands nombres: presque sûrement,

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

- Théorème central limite: pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right) \in I\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(I) = \int_I \gamma(x) dx$$

où μ est la loi de Gauss de moyenne 0 et de variance σ^2

- Classes d'universalité paramétrées par σ^2

Modèle de matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

- $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. sur \mathbb{C}

Modèle de matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

- $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. sur \mathbb{C}
- moyenne m et variance $\sigma^2 > 0$

Modèle de matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

- $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. sur \mathbb{C}
- moyenne m et variance $\sigma^2 > 0$
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ racines dans \mathbb{C} de $P_M(z) = \det(M - zI)$

Modèle de matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

- $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. sur \mathbb{C}
- moyenne m et variance $\sigma^2 > 0$
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ racines dans \mathbb{C} de $P_M(z) = \det(M - zI)$
- $M \mapsto \lambda(M)$ non-linéaire non-explicite

Modèle de matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

- $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. sur \mathbb{C}
- moyenne m et variance $\sigma^2 > 0$
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ racines dans \mathbb{C} de $P_M(z) = \det(M - zI)$
- $M \mapsto \lambda(M)$ non-linéaire non-explicite
- Normalisation par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour lignes et colonnes

Lois de Rademacher et de Gauss

- Loi de Rademacher standard sur $\{-1, 1\}$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$$

Lois de Rademacher et de Gauss

- Loi de Rademacher standard sur $\{-1, 1\}$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$$

- Loi de Gauss standard sur \mathbb{R}

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Lois de Rademacher et de Gauss

- Loi de Rademacher standard sur $\{-1, 1\}$

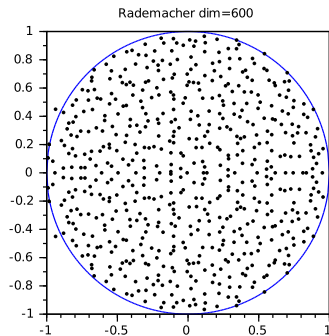
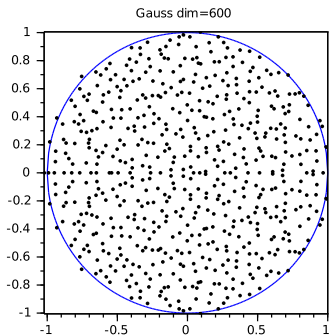
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$$

- Loi de Gauss standard sur \mathbb{R}

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

- Dans les deux cas $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$.

Universalité de Girko



$$\frac{1}{\sqrt{n}}M$$

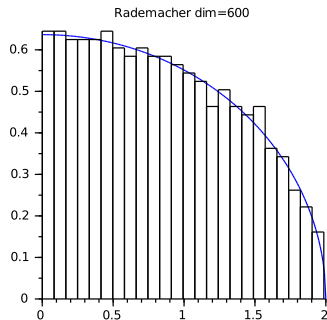
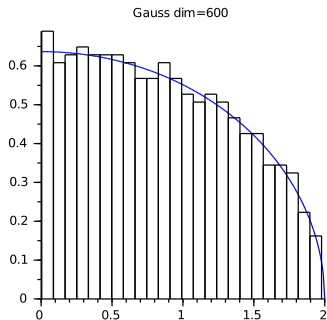
Programme Scilab

```

function girko(dim) // Fonction Scilab.
G = grand(dim,dim,'nor',0,1); // matrice de coef. de Gauss standards
B = sign(G); // matrice de coef. de Rademacher +/-1
sG = spec(G/sqrt(dim)); // spectre et normalisation en racine de dim
sB = spec(B/sqrt(dim)); // idem pour le cas Rademacher
clf(); I = [-1:0.01:1]; J = sqrt(1-I.^2);
subplot(1,2,1); title(sprintf('Gauss_dim=%i',dim));
set(gca(),"tight_limits","on"); set(gca(),"isoview","on");
plot(I,J,2); plot(I,-J,2);
plot(real(sG),imag(sG),'Marker','.', 'MarkerSize',3, 'LineStyle','none');
subplot(1,2,2); title(sprintf('Rademacher_dim=%i', dim));
set(gca(),"tight_limits","on"); set(gca(),"isoview","on");
plot(I,J,2); plot(I,-J,2);
plot(real(sB),imag(sB),'Marker','.', 'MarkerSize',3, 'LineStyle','none');
endfunction

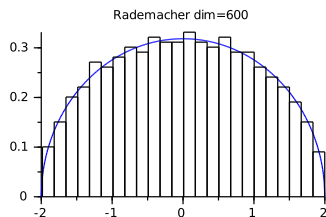
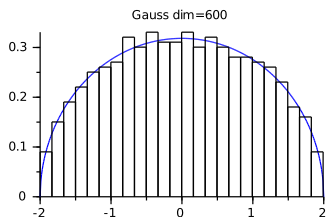
```

Universalité de Marchenko-Pastur



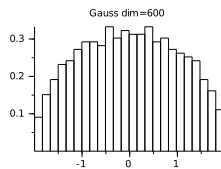
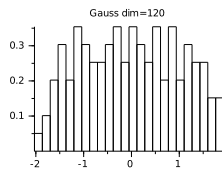
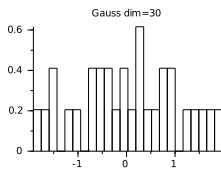
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{MM^*}$$

Universalité de Wigner



$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{M + M^*}{\sqrt{2}}$$

Phénomène de grande dimension



Mesure spectrale empirique

- Mesure spectrale empirique (comptage)

$$\mu_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k(M)}.$$

Mesure spectrale empirique

- Mesure spectrale empirique (comptage)

$$\mu_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k(M)}.$$

- Pour un ensemble E

$$\mu_M(E) = \frac{\text{card}\{1 \leq k \leq n : \lambda_k(M) \in E\}}{n}.$$

Mesure spectrale empirique

- Mesure spectrale empirique (comptage)

$$\mu_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k(M)}.$$

- Pour un ensemble E

$$\mu_M(E) = \frac{\text{card}\{1 \leq k \leq n : \lambda_k(M) \in E\}}{n}.$$

- Pour une fonction f (prendre $f = \mathbf{1}_E$)

$$\int f d\mu_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k(M)).$$

Mesure spectrale empirique

- Mesure spectrale empirique (comptage)

$$\mu_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k(M)}.$$

- Pour un ensemble E

$$\mu_M(E) = \frac{\text{card}\{1 \leq k \leq n : \lambda_k(M) \in E\}}{n}.$$

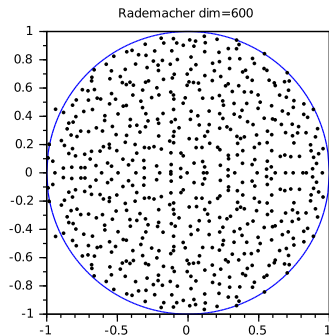
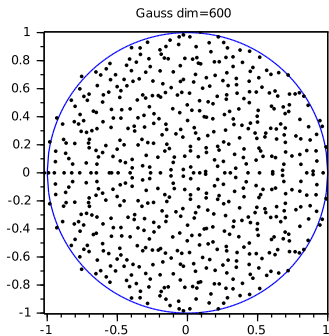
- Pour une fonction f (prendre $f = \mathbf{1}_E$)

$$\int f d\mu_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k(M)).$$

- Mesure spectrale empirique moyenne $\mathbb{E}\mu_M$

$$\mathbb{E} \int f d\mu_M, \quad \mathbb{E}(\mu(E)).$$

Universalité de Girko



$$\frac{1}{\sqrt{n}}M$$

Universalité de Girko

Théorème (Loi du cercle)

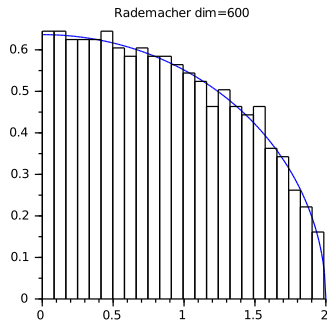
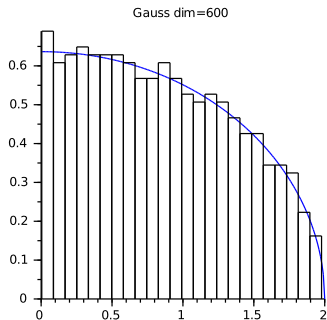
Presque sûrement, pour tout pavé ou boule E de \mathbb{R}^2 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}M}(E) = \mu(E)$$

où $\mu =$ loi uniforme sur disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sigma\}$, de densité,

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\pi\sigma^2} \mathbf{1}_{\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq \sigma\}}.$$

Universalité de Marchenko-Pastur



$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{MM^*}$$

Universalité de Marchenko-Pastur

Théorème (Loi du quart de cercle)

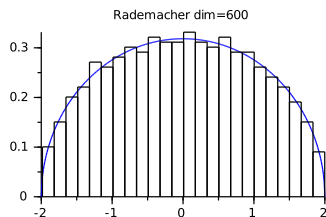
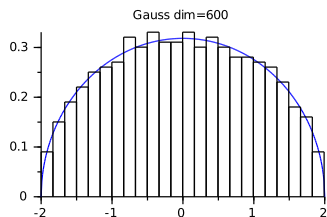
$H = \sqrt{MM^*}$. Presque sûrement, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}(I) = \mu(I)$$

où $\mu =$ loi du quart de cercle sur $[0, 2]$ de densité

$$x \mapsto \frac{\sqrt{4\sigma^2 - x^2}}{\pi\sigma^2} \mathbf{1}_{[0, 2\sigma]}(x).$$

Universalité de Wigner



$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{M + M^*}{\sqrt{2}}$$

Universalité de Wigner

Théorème (Loi du demi-cercle)

$H = \frac{M+M^*}{\sqrt{2}}$. Presque sûrement, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}(I) = \mu(I)$$

où $\mu =$ loi du demi-cercle sur $[-2\sigma, 2\sigma]$ de densité

$$x \mapsto \frac{\sqrt{4\sigma^2 - x^2}}{2\pi\sigma^2} \mathbf{1}_{[-2\sigma, 2\sigma]}(x).$$

Preuve Wigner: modèle réduit

- Réduction à $\mathbb{E}(H_{ij}) = 0$ et $\text{Var}(H_{ij}) = 1$
- Réduction à la distribution moyenne $\mathbb{E}\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}$:

$$\forall I \subset \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}(I) = \mu(I)$$

Preuve Wigner: fonctions tests

- Pour tout $f \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int f d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H} = \int f d\mu.$$

Preuve Wigner: fonctions tests

- Pour tout $f \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int f d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H} = \int f d\mu.$$

- Moments

$$\mathcal{F} = \{x \mapsto x^r : r \in \mathbb{N}\}$$

Preuve Wigner: fonctions tests

- Pour tout $f \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int f d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H} = \int f d\mu.$$

- Moments

$$\mathcal{F} = \{x \mapsto x^r : r \in \mathbb{N}\}$$

- Cauchy-Stieltjes

$$\mathcal{F} = \{x \mapsto (x - z)^{-1} : z \in \mathbb{C}, \Im z > 0\}.$$

Preuve Wigner: moments (combinatoire)

- Lien entre moments de $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}$ et coefficients de H :

$$\int x^r d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}(x) = \frac{1}{n^{1+r/2}} \sum_{k=1}^n \lambda_k(H)^r = \frac{1}{n^{1+r/2}} \text{Tr}(H^r).$$

Preuve Wigner: moments (combinatoire)

- Lien entre moments de $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}$ et coefficients de H :

$$\int x^r d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}(x) = \frac{1}{n^{1+r/2}} \sum_{k=1}^n \lambda_k(H)^r = \frac{1}{n^{1+r/2}} \text{Tr}(H^r).$$

- Termes contribuant asymptotiquement \equiv parenthésages

$$\mathbb{E} \frac{1}{n^{1+r/2}} \text{Tr}(H^r) = \frac{1}{n^{1+r/2}} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_r i_{r+1}})$$

Preuve Wigner: moments (combinatoire)

- Lien entre moments de $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}$ et coefficients de H :

$$\int x^r d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}(x) = \frac{1}{n^{1+r/2}} \sum_{k=1}^n \lambda_k(H)^r = \frac{1}{n^{1+r/2}} \text{Tr}(H^r).$$

- Termes contribuant asymptotiquement \equiv parenthésages

$$\mathbb{E} \frac{1}{n^{1+r/2}} \text{Tr}(H^r) = \frac{1}{n^{1+r/2}} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_r i_{r+1}})$$

- Moments pairs = nombres de Catalan

$$\mathbb{E} \int x^r d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}(x) = \frac{1}{1+k} \binom{2k}{k} \mathbf{1}_{r=2k} + o_{n \rightarrow \infty}(\mathbf{1})$$

Preuve Wigner: résolvante (analyse)

- Transformée de Cauchy-Stieltjes, $\Im z > 0$,

$$S_{\mu}(z) = \int \frac{1}{x - z} d\mu(x).$$

Preuve Wigner: résolvante (analyse)

- Transformée de Cauchy-Stieltjes, $\Im z > 0$,

$$S_{\mu}(z) = \int \frac{1}{x - z} d\mu(x).$$

- Trace normalisée de la résolvante:

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n} \text{Tr}((H - zI)^{-1}).$$

Preuve Wigner: résolvante (analyse)

- Transformée de Cauchy-Stieltjes, $\Im z > 0$,

$$S_{\mu}(z) = \int \frac{1}{x - z} d\mu(x).$$

- Trace normalisée de la résolvante:

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n} \text{Tr}((H - zI)^{-1}).$$

- Loi du demi-cercle (par méthode des résidus)

$$S_{\mu}(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 4} - z}{2}, \quad s + \frac{1}{z + s} = 0.$$

Preuve Wigner: résolvante (analyse)

- Transformée de Cauchy-Stieltjes, $\Im z > 0$,

$$S_\mu(z) = \int \frac{1}{x-z} d\mu(x).$$

- Trace normalisée de la résolvante:

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n} \text{Tr}((H - zI)^{-1}).$$

- Loi du demi-cercle (par méthode des résidus)

$$S_\mu(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 4} - z}{2}, \quad s + \frac{1}{z+s} = 0.$$

- Inversion par blocs: partition $\{1, \dots, n\} = K \cup K^c$,

$$(A^{-1})_{K,K} = (A_{K,K} - A_{K,K^c}(A_{K^c,K^c})^{-1}A_{K^c,K})^{-1}.$$

Preuve Wigner: résolvante (analyse)

- Transformée de Cauchy-Stieltjes, $\Im z > 0$,

$$S_\mu(z) = \int \frac{1}{x-z} d\mu(x).$$

- Trace normalisée de la résolvante:

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n} \text{Tr}((H - zI)^{-1}).$$

- Loi du demi-cercle (par méthode des résidus)

$$S_\mu(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 4} - z}{2}, \quad s + \frac{1}{z+s} = 0.$$

- Inversion par blocs: partition $\{1, \dots, n\} = K \cup K^c$,

$$(A^{-1})_{K,K} = (A_{K,K} - A_{K,K^c}(A_{K^c,K^c})^{-1}A_{K^c,K})^{-1}.$$

- $\varepsilon_n := S_{\mathbb{E}\mu_n}(z) + \frac{1}{z + S_{\mathbb{E}\mu_n}(z)} \rightarrow 0.$

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- $\{\Re M_{ij}, \Im M_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1/2

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- $\{\Re M_{ij}, \Im M_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1/2
- Densité de $H = \frac{M+M^*}{\sqrt{2}}$ proportionnelle à

$$H \mapsto \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |H_{ij}|^2 \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(HH^*) \right).$$

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- $\{\Re M_{ij}, \Im M_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1/2
- Densité de $H = \frac{M+M^*}{\sqrt{2}}$ proportionnelle à

$$H \mapsto \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |H_{ij}|^2 \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(HH^*) \right).$$

- $\{\Re H_{ij}, \Im H_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0, variance 1/2

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- $\{\Re M_{ij}, \Im M_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1/2
- Densité de $H = \frac{M+M^*}{\sqrt{2}}$ proportionnelle à

$$H \mapsto \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |H_{ij}|^2 \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(HH^*) \right).$$

- $\{\Re H_{ij}, \Im H_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0, variance 1/2
- $\{\Im H_{ij}\}_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- $\{\Re M_{ij}, \Im M_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1/2
- Densité de $H = \frac{M+M^*}{\sqrt{2}}$ proportionnelle à

$$H \mapsto \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |H_{ij}|^2 \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(HH^*) \right).$$

- $\{\Re H_{ij}, \Im H_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0, variance 1/2
- $\{\Im H_{ij}\}_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1
- Invariance unitaire: $\text{Loi}(H) = \text{Loi}(U^* H U)$ pour tout $U \in \mathbb{U}_n$

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- $\{\Re M_{ij}, \Im M_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1/2
- Densité de $H = \frac{M+M^*}{\sqrt{2}}$ proportionnelle à

$$H \mapsto \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |H_{ij}|^2 \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(HH^*) \right).$$

- $\{\Re H_{ij}, \Im H_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0, variance 1/2
- $\{\Im H_{ij}\}_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d. Gauss moyenne 0 variance 1
- Invariance unitaire: $\text{Loi}(H) = \text{Loi}(U^* H U)$ pour tout $U \in \mathbb{U}_n$
- Changement de variable $H = U^* D U \mapsto (U, D)$

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- Densité de $\lambda_1(H), \dots, \lambda_n(H)$ proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2.$$

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- Densité de $\lambda_1(H), \dots, \lambda_n(H)$ proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2.$$

- → Preuve Wigner par minimisation d'énergie

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

- Densité de $\lambda_1(H), \dots, \lambda_n(H)$ proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2.$$

- → Preuve Wigner par minimisation d'énergie
- → Preuve Wigner par polynômes orthogonaux

Preuve Wigner: minimisation d'énergie

- Densité de $\lambda_1(\frac{1}{\sqrt{n}}H), \dots, \lambda_n(\frac{1}{\sqrt{n}}H)$,

$$\exp \left(-\frac{n}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} \right).$$

Preuve Wigner: minimisation d'énergie

- Densité de $\lambda_1(\frac{1}{\sqrt{n}}H), \dots, \lambda_n(\frac{1}{\sqrt{n}}H)$,

$$\exp \left(-\frac{n}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} \right).$$

- Particules : confinement et répulsion coulombienne

$$e^{-n^2 E_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

Preuve Wigner: minimisation d'énergie

- Densité de $\lambda_1(\frac{1}{\sqrt{n}}H), \dots, \lambda_n(\frac{1}{\sqrt{n}}H)$,

$$\exp \left(-\frac{n}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} \right).$$

- Particules : confinement et répulsion coulombienne

$$e^{-n^2 E_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

- Phénomène de Laplace

$$\mu_n \approx \arg \min E_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Preuve Wigner: minimisation d'énergie

■ Énergie et mesure empirique

$$\begin{aligned} E_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^2}{2} + \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \ln \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} \\ &= \int \frac{x^2}{2} d\mu_n(x) + \iint_{x \neq y} \frac{1}{|x - y|} d\mu_n(x) d\mu_n(y) \end{aligned}$$

Preuve Wigner: minimisation d'énergie

- Énergie et mesure empirique

$$\begin{aligned}
 E_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^2}{2} + \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \ln \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} \\
 &= \int \frac{x^2}{2} d\mu_n(x) + \iint_{x \neq y} \frac{1}{|x - y|} d\mu_n(x) d\mu_n(y)
 \end{aligned}$$

- Énergie asymptotique

$$E(\mu) = \int \frac{x^2}{2} d\mu(x) + \iint \ln \frac{1}{|x - y|} d\mu(x) d\mu(y)$$

Preuve Wigner: minimisation d'énergie

- Énergie et mesure empirique

$$\begin{aligned}
 E_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^2}{2} + \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \ln \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} \\
 &= \int \frac{x^2}{2} d\mu_n(x) + \iint_{x \neq y} \frac{1}{|x - y|} d\mu_n(x) d\mu_n(y)
 \end{aligned}$$

- Énergie asymptotique

$$E(\mu) = \int \frac{x^2}{2} d\mu(x) + \iint \ln \frac{1}{|x - y|} d\mu(x) d\mu(y)$$

- Minimum d'énergie asymptotique

$$\mu_n \approx \arg \min_{\mu} E(\mu)$$

Preuve Wigner: minimisation d'énergie

- Énergie et mesure empirique

$$\begin{aligned}
 E_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^2}{2} + \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \ln \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} \\
 &= \int \frac{x^2}{2} d\mu_n(x) + \iint_{x \neq y} \frac{1}{|x - y|} d\mu_n(x) d\mu_n(y)
 \end{aligned}$$

- Énergie asymptotique

$$E(\mu) = \int \frac{x^2}{2} d\mu(x) + \iint \ln \frac{1}{|x - y|} d\mu(x) d\mu(y)$$

- Minimum d'énergie asymptotique

$$\mu_n \approx \arg \min_{\mu} E(\mu)$$

- Principe de Grandes Déviations de Varadhan.

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- $(P_k)_{k \geq 0}$ polynômes orthogonaux de Hermite

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- $(P_k)_{k \geq 0}$ polynômes orthogonaux de Hermite
- Densité de Gauss standard: $\gamma(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- $(P_k)_{k \geq 0}$ polynômes orthogonaux de Hermite
- Densité de Gauss standard: $\gamma(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$
- Pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$,

$$\int P_k(x) P_{k'}(x) \gamma(x) dx = \mathbf{1}_{k=k'}.$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- $(P_k)_{k \geq 0}$ polynômes orthogonaux de Hermite
- Densité de Gauss standard: $\gamma(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$
- Pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$,

$$\int P_k(x) P_{k'}(x) \gamma(x) dx = \mathbf{1}_{k=k'}.$$

- Récurrence à trois termes

$$xP_k = \sqrt{k+1} P_{k+1} + \sqrt{k} P_{k-1}.$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Comme P_k est un polynôme de degré k on obtient

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j| = c_n \det((P_{i-1}(\lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n})$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Comme P_k est un polynôme de degré k on obtient

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j| = c_n \det((P_{i-1}(\lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n})$$

- Noyau

$$K(x, y) := \sum_{k=0}^n P_k(x)P_k(y),$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Comme P_k est un polynôme de degré k on obtient

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j| = c_n \det((P_{i-1}(\lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n})$$

- Noyau

$$K(x, y) := \sum_{k=0}^n P_k(x)P_k(y),$$

- Représentation déterminantale:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2 = c_n \det((K(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n}).$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Si H GUE alors densité de $\mathbb{E}\mu_H$:

$$x \mapsto \gamma(x) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(x).$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Si H GUE alors densité de $\mathbb{E}\mu_H$:

$$x \mapsto \gamma(x) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(x).$$

- Et densité de $\mu_n := \mathbb{E}\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}$:

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\sqrt{n}x) \gamma(\sqrt{n}x).$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Si H GUE alors densité de $\mathbb{E}\mu_H$:

$$x \mapsto \gamma(x) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(x).$$

- Et densité de $\mu_n := \mathbb{E}\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}$:

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\sqrt{n}x) \gamma(\sqrt{n}x).$$

- \rightarrow Wigner : récurrence à trois termes sur moments

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Si H GUE alors densité de $\mathbb{E}\mu_H$:

$$x \mapsto \gamma(x) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(x).$$

- Et densité de $\mu_n := \mathbb{E}\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}H}$:

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2(\sqrt{n}x) \gamma(\sqrt{n}x).$$

- \rightarrow Wigner : récurrence à trois termes sur moments
- \rightarrow Wigner (alternative) : transformée de Laplace

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Transformée de Laplace de $P_n^2(\sqrt{nx})\gamma(\sqrt{nx})$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Transformée de Laplace de $P_n^2(\sqrt{nx})\gamma(\sqrt{nx})$
- Solution quand $n \rightarrow \infty$ de l'ÉDO

$$4\theta f'' + 2f' - \theta f = 0$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Transformée de Laplace de $P_n^2(\sqrt{nx})\gamma(\sqrt{nx})$
- Solution quand $n \rightarrow \infty$ de l'ÉDO

$$4\theta f'' + 2f' - \theta f = 0$$

- Convergence vers loi de l'arcsinus sur $[-2, 2]$:

$$P_n^2(\sqrt{nx})\gamma(\sqrt{nx}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)}{\pi\sqrt{4-x^2}}.$$

Preuve Wigner: polynômes orthogonaux

- Transformée de Laplace de $P_n^2(\sqrt{nx})\gamma(\sqrt{nx})$
- Solution quand $n \rightarrow \infty$ de l'ÉDO

$$4\theta f'' + 2f' - \theta f = 0$$

- Convergence vers loi de l'arcsinus sur $[-2, 2]$:

$$P_n^2(\sqrt{nx})\gamma(\sqrt{nx}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)}{\pi\sqrt{4-x^2}}.$$

- Comme μ_n est une moyenne de Cesàro on obtient

$$\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Loi}(\sqrt{U}\xi).$$

$U \sim \text{Uniforme}[0, 1]$ et $\xi \sim \text{ArcSinus}([-2, 2])$.

Probabilités libres \approx 1990



Dan-Virgil Voiculescu (1949–)

■ Grandes matrices aléatoires \leftrightarrow algèbre d'opérateurs

Probabilités classiques	Probabilités libres
Variable aléatoire	Élément d'algèbre
Espérance	Trace normalisée
Moments	Moments
Indépendance	Liberté
Loi de Gauss	Loi du demi-cercle

Loi

- Algèbre \mathcal{A} , involution $*$, trace τ

Loi

- Algèbre \mathcal{A} , involution $*$, trace τ
- Exemple: $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\cdot^* = \bar{\cdot}^\top$, $\tau = \frac{1}{n}\text{Tr}$

Loi

- Algèbre \mathcal{A} , involution $*$, trace τ
- Exemple: $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\cdot^* = \bar{\cdot}^\top$, $\tau = \frac{1}{n}\text{Tr}$
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\text{Loi}(a) =$ moments mixtes de a et a^* :

$$\forall r \geq 1, \quad \tau(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_r}), \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{1, *\}$$

Loi

- Algèbre \mathcal{A} , involution $*$, trace τ
- Exemple: $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\cdot^* = \bar{\cdot}^\top$, $\tau = \frac{1}{n}\text{Tr}$
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\text{Loi}(a) =$ moments mixtes de a et a^* :

$$\forall r \geq 1, \quad \tau(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_r}), \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{1, *\}$$

- On dit que a est réel lorsque $aa^* = a^*a$

Loi

- Algèbre \mathcal{A} , involution $*$, trace τ
- Exemple: $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\cdot^* = \bar{\cdot}^\top$, $\tau = \frac{1}{n}\text{Tr}$
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\text{Loi}(a) =$ moments mixtes de a et a^* :

$$\forall r \geq 1, \quad \tau(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_r}), \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{1, *\}$$

- On dit que a est réel lorsque $aa^* = a^*a$
- $\text{Loi}(a) = \mu_a$ quand $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $a \in \mathcal{A}$ réel:

$$\tau(a^r) = \frac{1}{n}\text{Tr}(a^r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i(a)^r = \int x^r d\mu_a(x).$$

Liberté

- Indépendance classique: $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ indépendantes ssi

$$\forall X_1, \dots, X_n, \quad \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = 0.$$

Liberté

- Indépendance classique: $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ indépendantes ssi

$$\forall X_1, \dots, X_n, \quad \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = 0.$$

- Indépendance algébrique (liberté): $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ libres ssi

$$\forall a_1, \dots, a_n, \quad \tau(a_1 \dots a_n) = 0.$$

Liberté

- Indépendance classique: $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ indépendantes ssi

$$\forall X_1, \dots, X_n, \quad \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = 0.$$

- Indépendance algébrique (liberté): $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ libres ssi

$$\forall a_1, \dots, a_n, \quad \tau(a_1 \dots a_n) = 0.$$

- Calcul de moments joints: si a, b libres alors

Liberté

- Indépendance classique: $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ indépendantes ssi

$$\forall X_1, \dots, X_n, \quad \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = 0.$$

- Indépendance algébrique (liberté): $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ libres ssi

$$\forall a_1, \dots, a_n, \quad \tau(a_1 \dots a_n) = 0.$$

- Calcul de moments joints: si a, b libres alors

- $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ car $\tau((a - \tau(a))(b - \tau(b))) = 0$

Liberté

- Indépendance classique: $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ indépendantes ssi

$$\forall X_1, \dots, X_n, \quad \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = 0.$$

- Indépendance algébrique (liberté): $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ libres ssi

$$\forall a_1, \dots, a_n, \quad \tau(a_1 \dots a_n) = 0.$$

- Calcul de moments joints: si a, b libres alors
 - $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ car $\tau((a - \tau(a))(b - \tau(b))) = 0$
 - $\text{Loi}((a, b))$ ne dépend que de $\text{Loi}(a)$ et $\text{Loi}(b)$

Liberté

- Indépendance classique: $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ indépendantes ssi

$$\forall X_1, \dots, X_n, \quad \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = 0.$$

- Indépendance algébrique (liberté): $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ libres ssi

$$\forall a_1, \dots, a_n, \quad \tau(a_1 \dots a_n) = 0.$$

- Calcul de moments joints: si a, b libres alors
 - $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ car $\tau((a - \tau(a))(b - \tau(b))) = 0$
 - $\text{Loi}((a, b))$ ne dépend que de $\text{Loi}(a)$ et $\text{Loi}(b)$
 - convolution libre: $\text{Loi}(a + b) = \text{Loi}(a) \boxplus \text{Loi}(b)$

Théorème central limite libre

- Si $a_1, a_2, \dots \in \mathcal{A}$ sont libres, réels, de même loi,

Théorème central limite libre

- Si $a_1, a_2, \dots \in \mathcal{A}$ sont libres, réels, de même loi,
- centrés $\tau(a_i) = 0$ et réduits $\tau(a_i^2) = 1$

Théorème central limite libre

- Si $a_1, a_2, \dots \in \mathcal{A}$ sont libres, réels, de même loi,
- centrés $\tau(a_i) = 0$ et réduits $\tau(a_i^2) = 1$
- Alors:

$$s_n := \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{DemiCercle}([-2, 2]).$$

Théorème central limite libre

- Si $a_1, a_2, \dots \in \mathcal{A}$ sont libres, réels, de même loi,
- centrés $\tau(a_i) = 0$ et réduits $\tau(a_i^2) = 1$
- Alors:

$$s_n := \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{DemiCercle}([-2, 2]).$$

- C'est-à-dire

$$\forall r \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(s_n^r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 2k + 1 \\ \frac{1}{1+k} \binom{2k}{k} & \text{si } r = 2k \end{cases}$$

Théorème central limite libre

- Si $a_1, a_2, \dots \in \mathcal{A}$ sont libres, réels, de même loi,
- centrés $\tau(a_i) = 0$ et réduits $\tau(a_i^2) = 1$
- Alors:

$$s_n := \frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{DemiCercle}([-2, 2]).$$

- C'est-à-dire

$$\forall r \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(s_n^r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 2k + 1 \\ \frac{1}{1+k} \binom{2k}{k} & \text{si } r = 2k \end{cases}$$

- Lois du demi-cercle stables par convolution libre

Liberté asymptotique

■ $\text{spec}(A + B) \neq f(\text{spec}(A), \text{spec}(B))$

Liberté asymptotique

- $\text{spec}(A + B) \neq f(\text{spec}(A), \text{spec}(B))$
- Si A et B GUE indépendantes alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mu_{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mu_A \boxplus \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mu_B$$

Liberté asymptotique

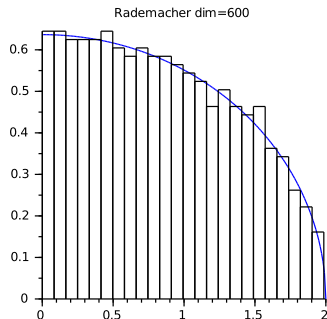
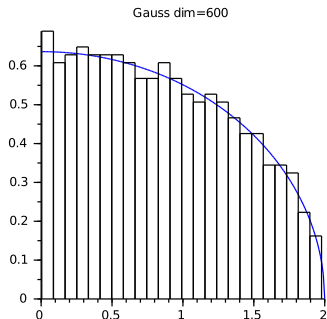
- $\text{spec}(A + B) \neq f(\text{spec}(A), \text{spec}(B))$
- Si A et B GUE indépendantes alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mu_{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mu_A \boxplus \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mu_B$$

- Si $\mu_A \rightarrow \mu_a$ et $\mu_B \rightarrow \mu_b$ et U, V Haar unitaires indép. alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mu_{UAU^* + VB V^*} = \mu_a \boxplus \mu_b.$$

Universalité de Marchenko-Pastur

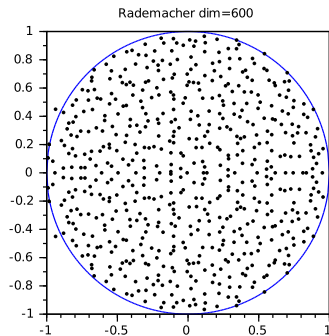
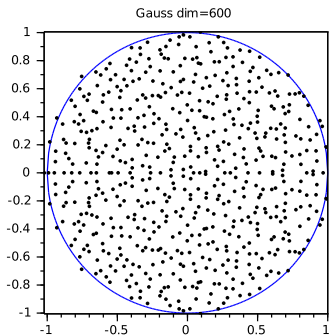


$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{MM^*}$$

Marchenko-Pastur: quelques mots

- Mêmes méthodes (moments, résolvante)
- Modèle gaussien: Laguerre Unitary Ensemble (LUE)
- LUE: Minimisation d'énergie, polynômes orthogonaux

Universalité de Girko



$$\frac{1}{\sqrt{n}}M$$

Girko: quelques mots

- Échec de la méthode des moments et de la résolvante
- Modèle gaussien: Complex Ginibre Ensemble (CGE)
- CGE: Minimisation d'énergie, polynômes orthogonaux

Girko: quelques mots

- Potentiel logarithmique

$$U_{\mu}(z) = \int_{\mathbb{C}} \ln \frac{1}{|z - \lambda|} d\mu(\lambda)$$

Girko: quelques mots

- Potentiel logarithmique

$$U_\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \ln \frac{1}{|z - \lambda|} d\mu(\lambda)$$

- Formule d'inversion

$$\Delta U_\mu = -2\pi\mu$$

Girko: quelques mots

- Potentiel logarithmique

$$U_\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \ln \frac{1}{|z - \lambda|} d\mu(\lambda)$$

- Formule d'inversion

$$\Delta U_\mu = -2\pi\mu$$

- Hermitisation

$$\begin{aligned} U_{\mu_A}(z) &= -\frac{1}{n} \ln |\det(A - zI)| \\ &= -\frac{1}{n} \ln \left| \det \sqrt{(A - zI)(A - zI)^*} \right| \\ &= \int_0^\infty \ln(s) d\mu_{\sqrt{(A - zI)(A - zI)^*}}(s) \end{aligned}$$

Un problème ouvert sur l'invertibilité

- $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. $\mathbb{P}(A_{ij} = -1) = \mathbb{P}(A_{ij} = 1) = 1/2$

Un problème ouvert sur l'invertibilité

- $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. $\mathbb{P}(A_{ij} = -1) = \mathbb{P}(A_{ij} = 1) = 1/2$
- Conjecture (derniers progrès: Bourgain-Vu-Wood):

$$\mathbb{P}(\det(A) = 0) = \left(\frac{1}{2} + o_{n \rightarrow \infty}(1) \right)^n.$$

Un problème ouvert sur l'invertibilité

- $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i.i.d. $\mathbb{P}(A_{ij} = -1) = \mathbb{P}(A_{ij} = 1) = 1/2$
- Conjecture (derniers progrès: Bourgain-Vu-Wood):

$$\mathbb{P}(\det(A) = 0) = \left(\frac{1}{2} + o_{n \rightarrow \infty}(1) \right)^n.$$

- Probabilité d'égalité de deux lignes ou colonnes: 2^{-n} .

Au delà

- Premier ordre / Second ordre

Au delà

- Premier ordre / Second ordre
- Global / Local

Au delà

- Premier ordre / Second ordre
- Global / Local
- Vecteurs propres / Valeurs propres

Au delà

- Premier ordre / Second ordre
- Global / Local
- Vecteurs propres / Valeurs propres
- Asymptotique / Quantitatif