Modèles markoviens en biologie

Examen du 21 janvier 2008

Règles du jeu. Les exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre certains résultats donnés dans le sujet pour répondre aux questions suivantes. Le sujet est relativement court, aussi, la rédaction doit être soignée. Il n'y a pas de pièges. Tous les documents sont autorisés. Vous savez tout, et vous avez le temps (**trois heures**), alors bon travail !

Exercice 1. Soit $\lambda > 0$ un réel et $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson simple d'intensité λ.

1. Dessiner l'allure d'une trajectoire du processus ;
2. Montrer que $\lim_{t\to\infty} N_t = +\infty$ presque sûrement ;
3. Pour tout $0 < t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = t$, préciser la loi du vecteur aléatoire
$$(N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_t - N_{t_{n-1}});$$
4. Montrer que $N_{[t]} \leqslant N_t \leqslant N_{[t]+1}$ pour tout réel $t \geqslant 0$, où $[t]$ désigne la partie entière du réel t ;
5. En utilisant une somme télescopique, déduire des deux questions précédentes le comportement presque sûr de N_t/t lorsque $t \to \infty$;
6. Préciser le comportement en loi de $\sqrt{t}(N_t/t - \lambda)$. On pourra calculer une transformation qui caractérise la loi.
7. En déduire une méthode pour estimer λ à partir de N_t. Peut-on obtenir un intervalle de confiance ?

On désigne par $(T_n)_n$ la suite des temps de sauts du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$.

8. Pour tout $n \geqslant 1$, précisez la loi de T_n. Qu'elle est sa densité ?
9. Préciser, en le justifiant, le comportement de
$$\frac{T_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \sqrt{n}\left(\frac{T_n}{n} - \frac{1}{\lambda}\right).$$
10. Déduire de la question précédente une méthode pour estimer $1/\lambda$ à partir de l'observation d'une trajectoire du processus. Peut-on obtenir un intervalle de confiance ? Comment estimer λ ?
11. Montrer que $N_{T_n} = n$ et en déduire d'une nouvelle manière le comportement de N_t/t.
12. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ raisonnable, et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}(f(N_t)|N_0 = x) - f(x)}{t} = \lambda(f(x+1) - f(x)).$$
Que représente cette quantité pour le processus ?
13. Calculer la transformée de Laplace de la mesure atomique aléatoire $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{T_n}$.

Exercice 2. On s'intéresse à la répartition au fil des années d'une maladie dans un champ cultivé, modélisé par un compact E de $\mathbb{R}^2$. À l'année n, on modélise la répartition de la maladie dans le champ grâce à une mesure atomique aléatoire X_n dont les atomes sont dans E. À l'année n, une zone malade $x \in E$ subsiste à l'année $n+1$ avec probabilité $p_n(x)$, indépendamment de toutes les autres. On suppose qu'à l'année 0, la mesure atomique aléatoire X_0 constitue un processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité Λ_0.

1. Que peut modéliser la dépendance en n et x de $p_n(x)$?
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la mesure atomique aléatoire X_n constitue un processus ponctuel de Poisson dont on précisera la mesure d'intensité Λ_n en fonction de Λ_0 et des fonctions $p_0, \ldots, p_{n-1}$;
3. Préciser la transformée de Laplace de X_n ;
4. À quelle condition la maladie subsiste dans le champ au fil des années ?
5. Lorsque $p_n(x)$ ne dépend pas de n et de x, qu'elle est l'évolution au fil des années du nombre moyen de zone malades ?
6. Proposer une modification du modèle qui tient compte de la contagion, en définissant X_{n+1} conditionnellement à X_n.

Exercice 3. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de moyenne $1/\lambda$ et $B_1, \ldots, B_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle $1/\mu$, indépendantes de $A_1, \ldots, A_n$.

1. Préciser la loi de $A := \min(A_1, \ldots, A_n)$, de $B := \min(B_1, \ldots, B_n)$, et de $C := \min(A, B)$;
2. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, calculer $\mathbb{P}(C = A_i)$ et $\mathbb{P}(C = B_i)$;

On considère à présent l'évolution d'une population de cellules. Chaque cellule subit un mécanisme d'évolution indépendamment de toutes les autres. Ce mécanisme est le suivant : pour chaque cellule, il existe une compétition entre une horloge de duplication qui sonne au bout d'un temps exponentiel de moyenne $1/\lambda$, et une horloge de mort qui sonne au bout d'un temps exponentiel de moyenne $1/\mu$. Ces deux horloges sont indépendantes, et la première qui sonne détermine le destin de la cellule (mort ou duplication). Les nouvelles cellules créées par le mécanisme de duplication subissent ensuite le même sort. On désigne par X_t le nombre de cellules à l'instant t.

3. Expliquer pourquoi $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est un processus de Markov à temps continu et d'espace d'états $\mathbb{N}$, de générateur infinitésimal donné pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ par

$$L(n,m) = \begin{cases} n\lambda & \text{si } m = n+1, \\ n\mu & \text{si } m = n-1, \\ -n(\lambda+\mu) & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

4. Donner une description qualitative des trajectoires du processus ;
5. Préciser la nature de l'état 0 ;
6. Proposer un passage à la limite vers un processus de diffusion lorsque $\lambda = \mu > 0$.

— fin du sujet —