Université Paris-Est Marne-la-Vallée – Examen M2 MA 3h – Mars 2010

Documents autorisés

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère l'évolution de la taille d'une population au fil des générations. On note Z_n la taille de la population à la génération $n \in \mathbb{N}$. La génération $n+1$ est formée de la manière suivante : le $k^{\text{ème}}$ individu de la génération n fait un nombre d'enfant aléatoire $X_{n,i}$ de même loi que X, indépendamment des autres et des générations précédentes, puis meurt immédiatement. On a donc

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$$

où les $(X_{n,k})_{n,k\geq 1}$ sont i.i.d. et de même loi que X, indépendantes de Z_0. On adopte la convention $Z_{n+1} := 0$ si $Z_n = 0$. On souhaite étudier le comportement de Z_n lorsque $n \to \infty$, en fonction de la loi de X et de Z_0. On note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Première partie – Réductions

1. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{N}$. Préciser le noyau de transition en fonction de la loi de X, et la nature de l'état 0.
   Dans toute la suite, on suppose que $Z_0 > 0$
2. Soit P_k la probabilité de retour à l'état $k \geq 1$. Montrer que $P_k = p_1^k$ si $p_0 = 0$, tandis que $P_k \leq 1 - p_0^k$ sinon. En déduire que si $p_1 < 1$ alors tous les états non nuls sont transitoires et en particulier $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \text{ ou } \lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 1$
3. (a) Montrer que le comportement de $(Z_n)_{n\geq 0}$ se ramène au cas où $Z_0 = 1$.
   Dans toute la suite, on suppose que $Z_0 = 1$
   (b) Montrer que si $p_0 = 1$, alors $Z_n = 0$ pour tout $n \geq 1$
   (c) Montrer que si $p_1 = 1$, alors $Z_n = 1$ pour tout $n \geq 1$
   (d) Montrer que si $p_k = 1$ pour un certain $k \geq 2$, alors $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 1$
   (e) Montrer que si $p_0 = 0$ et $p_1 < 1$ alors $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 1$
   (f) Montrer que si $p_0 + p_1 = 1$ alors $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) = 1$

   Dans toute la suite, on suppose que $0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1$ **et** $p_k < 1\ \forall k$

Seconde partie – Probabilité d'extinction

On s'intéresse à présent à la *probabilité d'extinction* $\mathbb{P}(T < \infty)$ de $(Z_n)_{n\geq 0}$, où

$$T := \inf\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Z_n = 0\}$$

est le *temps d'extinction*. On rappelle que la *fonction génératrice* de X est

$$G_X : s \in [0,1] \mapsto G_X(s) := \mathbb{E}(s^X) \in [0,1].$$

Si X est intégrable, alors G_X est dérivable en 1^- et $G'_X(1^-) = \mathbb{E}(X)$. De plus, si X est de carré intégrable, alors G_X est deux fois dérivable en 1^- et $G''_X(1^-) = \mathbb{E}(X(X-1))$.
Dans toute la suite, on suppose que X a une moyenne m et une variance σ^2.

1. Montrer que G_X est strictement convexe (utiliser $p_0 + p_1 < 1$)
2. Montrer que si $m \leq 1$, alors G_X admet 1 comme unique point fixe sur $]0, 1]$, qui est attractif
3. Montrer que si $m > 1$, alors G_X admet deux points fixes sur $]0, 1]$ qui sont 1 et q où q est l'unique solution de $G_X(q) = q$, et que seul q est attractif (utiliser $p_0 > 0$)
4. Montrer que $G_{Z_n} = (G_X)^{\circ n}$ où $\circ n$ désigne l'itérée $n^{\text{ème}}$, pour tout $n \geq 1$
5. En déduire que si X est intégrable de moyenne m, alors pour tout $n \geq 1$, Z_n est intégrable de moyenne m^n. De plus, si X est de carré intégrable de variance σ^2, alors pour tout $n \geq 1$, Z_n est de carré intégrable de variance $\sigma^2 m^n (m^n - 1)/(m^2 - m)$ si $m \neq 1$ et $n\sigma^2$ si $m = 1$.
6. Montrer que $\{T < \infty\} = \cup_{n \geq 0} \{Z_n = 0\}$ et que $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$
7. Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} G_{Z_n}(0)$.
8. En déduire que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ si $m \leq 1$ tandis que $\mathbb{P}(T < \infty) = q$ si $m > 1$.

Troisième partie – Étude du cas sur-critique

Dans cette section, on suppose que $m > 1$. Nous avons montré que dans ce cas, la taille moyenne de population croît géométriquement : $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ pour tout $n \geq 0$, mais peut s'éteindre avec une probabilité $q = \mathbb{P}(T < \infty) < 1$. On pose $W_n := Z_n/m^n$.

1. Montrer que $\mathbb{E}((W_{n+k} - W_n)^2) = \frac{\sigma^2}{m^n} \frac{1-m^{-k}}{m^2-m}$ pour tout $n, k \geq 0$
2. En déduire que $(W_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire $W \in \mathbb{L}^2$
3. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}((W_n - W)^2) < \infty$ et en déduire que $W_n \to W$ presque sûrement
4. Montrer que W a pour moyenne 1 et variance $\sigma^2/(m^2 - m)$.
5. Montrer que sur l'événement $\{Z_1 = k\}$, le vecteur aléatoire $(Z_2, \ldots, Z_n)$ est la somme de k vecteurs aléatoires i.i.d. de même loi que $(Z_1, \ldots, Z_{n-1})$.
6. En déduire que $\mathbb{P}(W = 0 \,|\, Z_1 = k) = \mathbb{P}(W = 0)^k$
7. En déduire que $\mathbb{P}(W = 0)$ est un point fixe de G_X
8. En déduire que $\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(T < \infty)$.
9. Notons $L_n(t) := \mathbb{E}(e^{-tW_n})$ et $L(t) := \mathbb{E}(e^{-tW})$ la transformée de Laplace de W_n et de W respectivement. Montrer que $L(mt) = G_X(L(t))$ pour tout $t \geq 0$, et $L'(0) = -1$, et que cela caractérise la loi de W.

– Fin du sujet –