Modèles markoviens en biologie

Corrigé de l'examen du 27 mars 2007

Exercice 1. *Modèle du votant*

1. Soit $\eta \in F$. Le nombre de conflits pour η est le nombre de couples (x, y) avec $\eta(x) = 1$, $\eta(y) = 0$ et $x \sim y$, c'est-à-dire $\sum_{x,\ \eta(x)=1} M_\eta(x)$ mais aussi le nombre de couples (y, x) avec $\eta(y) = 0$, $\eta(x) = 1$ et $x \sim y$, c'est-à-dire $\sum_{y,\ \eta(y)=0} M_\eta(0)$. On a donc bien

$$C_\eta = \sum_{x,\ \eta(x)=1} M_\eta(x) = \sum_{x,\ \eta(x)=0} M_\eta(x).$$

2. Le vecteur $(M_\eta(x))_{0\leq x\leq 7}$ est donné par

$$M_\eta = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 2)$$

et le vecteur des probabilités $(p_y)_{y\in\{0,\dots,7\}}$ que le site y soit choisi est proportionnel au vecteur

$$(1 + \alpha, 1 + \alpha, 1, 1, 1 + \alpha, 0, 1 + \alpha, 2).$$

Il vaut donc $(1 + \alpha, 1 + \alpha, 1, 1, 1 + \alpha, 0, 1 + \alpha, 2)/(8 + 4\alpha)$.
3. Dans les configurations $(0, \dots, 0)$ et $(1, \dots, 1)$, le nombre de conflits est nul (et ce sont les seules configurations sans conflit). Ce sont donc les seuls états absorbants de la chaîne de Markov.
4. Toutes les configurations mènent à $(0, \dots, 0)$ et $(1, \dots, 1)$. La chaînes n'est donc pas irréductible, pas récurrente et possède deux états absorbants.
5. D'après la question 3, si η est différente de $(0, \dots, 0)$ et $(1, \dots, 1)$, le site x où a lieu le changement d'opinion vérifie

- $\eta(x) = 1$ avec probabilité $\displaystyle\sum_{x,\ \eta(x)=1} \frac{M_\eta(x)}{(2 + \alpha)C_\eta} = \frac{1}{2 + \alpha}$, et alors $S_{n+1} = S_n + 1$,
- $\eta(x) = 0$ avec probabilité $\displaystyle\sum_{x,\ \eta(x)=0} \frac{(1 + \alpha)M_\eta(x)}{(2 + \alpha)C_\eta} = \frac{1 + \alpha}{2 + \alpha}$, et alors $S_{n+1} = S_n - 1$.

6. Si $S_n \in \{0, N\}$ alors $S_{n+1} = S_n$ ce qui n'apporte aucune condition. Si $k \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, on a

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|S_n = k) = (S_n + 1)\frac{1}{2 + \alpha} + (S_n - 1)\frac{1 + \alpha}{2 + \alpha} = S_n - \frac{\alpha}{2 + \alpha}.$$

Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale si et seulement si $\alpha = 0$.
7. Soit $\alpha > 0$. Soit $k \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, alors

$$\mathbb{E}\big((q/p)^{S_{n+1}}|S_n = k\big) = p\left(\frac{q}{p}\right)^{k+1} + q\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{k}.$$

On en déduit immédiatement le résultat demandé.
8. Le théorème d'arrêt donne

$$\mathbb{P}(S_T = N|S_0 = k) = \begin{cases} k/N & \text{si } \alpha = 0, \\ \dfrac{1 - (q/p)^k}{1 - (q/p)^N} & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

9. La suite de processus $(S_{[Nt]}^N/N)_{t\geq 0}$ converge dans tous les cas vers un processus X lorsque N tend vers l'infini. Si $\alpha_N = 0$ alors X est le mouvement brownien standard issu de $x \in]0,1[$ arrêté en 0 et 1. Si α_N est constant, X est le processus $((x+\alpha t)\wedge 1)_{t\geq 0}$. Enfin, si $\alpha_N = \beta/\sqrt{N}$ alors X est le mouvement brownien avec dérive β arrêté en 0 ou 1.

Exercice 2. *Croissance d'une population*
1. Lorsque $X_t = i$, le temps de saut suivant est le minimum de $2i$ v.a. exponentielles indépendantes dont i sont de loi $\mathcal{E}(\mu)$ et i sont de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, sa loi est donc la loi $\mathcal{E}(i(\lambda+\mu))$ et un individu de dédouble avec probabilité $\lambda/(\lambda+\mu)$ et meurt avec probabilité $\mu/(\lambda+\mu)$.
2. Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$Lf(i) = i\lambda(f(i+1)-f(i)) + i\mu(f(i-1)-f(i)) = i(\lambda-\mu).$$

On a donc $Lf = (\lambda-\mu)f$. Notons $\alpha(t) = P_t f(i)$. Alors

$$\alpha'(t) = \partial_t P_t f(i) = P_t Af(i) = (\lambda-\mu)P_t f(i) = (\lambda-\mu)\alpha(t).$$

On a donc $P_t f(i) = P_0(i) f e^{(\lambda-\mu)t}$, ou encore $\mathbb{E}(X_t|X_0 = i) = ie^{(\lambda-\mu)t}$. De même,

$$Lg(i) = i\lambda(g(i+1)-g(i)) + i\mu(g(i-1)-g(i)) = 2i^2(\lambda-\mu) + i(\lambda+\mu).$$

On a donc $Lg = 2(\lambda-\mu)g + (\lambda+\mu)f$. Notons $\beta(t) = P_t g(i)$. Alors

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= \partial_t P_t g(i) = P_t Ag(i) = 2(\lambda-\mu)P_t g(i) + (\lambda+\mu)P_t f(i)\\ &= 2(\lambda-\mu)\beta(t) + (\lambda+\mu)\alpha(t).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$P_t g(i) = i\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\Big(e^{(\lambda-\mu)t}-1\Big) + i^2 e^{2(\lambda-\mu)t}$$

puisque $P_0 g(0) = i^2$. La variance est égale à

$$\mathbb{V}(X_t|X_0 = i) = \mathbb{E}((X_t)^2|X_0 = i) - \mathbb{E}(X_t|X_0 = i)^2 = i\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\Big(e^{(\lambda-\mu)t}-1\Big).$$

Enfin,

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t|X_0)) = \mathbb{E}(X_0)e^{(\lambda-\mu)t} = me^{(\lambda-\mu)t}.$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_t) &= \mathbb{E}\Big([\mathbb{E}(X_t^2|X_0)] - [\mathbb{E}(X_t|X_0)]^2\Big) + \mathbb{E}\Big([\mathbb{E}(X_t|X_0)]^2\Big) - (\mathbb{E}(X_t))^2\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{V}(X_t|X_0)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(X_t|X_0)) = m\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\Big(e^{(\lambda-\mu)t}-1\Big) + \sigma^2 e^{2(\lambda-\mu)t}.\end{aligned}$$

3. Si L_N est le générateur infinitésimal de $(X^N)_{t\geq 0}$ alors NL_N est le générateur infinitésimal de $(X_{Nt}^N)_{t\geq 0}$. Donc le générateur infinitésimal de $(X_{Nt}^N/N)_{t\geq 0}$ est donné par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad A_N f(i/N) = iN\lambda_N(f((i+1)/N) - f(i/N)) + iN\mu_N(f((i-1)/N) - f(i/N)).$$

Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$ et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. Notons $y_N = [Ny]/N$. Alors

$$\begin{aligned}A_N f(y_N) &= N^2 y_N \lambda_N(f(y_N + 1/N) - f(y_N)) + N^2 y_N \mu_N(f(y_N - 1/N) - f(y_N))\\ &= N(\lambda_N - \mu_N)y_N f'(y_N) + \frac{1}{2}(\lambda_N + \mu_N)y_N f''(y_N) + o(1/N).\end{aligned}$$

Pour que $A_N f(y_N)$ converge vers $Af(y)$, il faut et il suffit que

$$N(\lambda_N - \mu_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} b \quad \text{et} \quad \lambda_N + \mu_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 2a.$$

La diffusion limite est donc solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t bY_s\,ds + \int_0^t \sqrt{2a}Y_s\,dB_s.$$

4. Prenons l'espérance de l'expression ci-dessus :

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_0) + b\int_0^t \mathbb{E}(Y_s)\,ds.$$

On a donc $\mathbb{E}(Y_t|Y_0 = y) = ye^{bt}$. De même, en appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$Y_t^2 = y^2 + \int_0^t (2bY_s^2 + aY_s)\,ds + \int_0^t 2\sqrt{2a}Y_s^2\,dB_s.$$

Il reste à prendre l'espérance et résoudre la même équation différentielle qu'à la question 2. On en déduit que

$$\mathbb{V}(Y_t|Y_0 = y) = y\frac{a}{b}e^{bt}\Big(e^{bt} - 1\Big).$$

La question 2 assure que

$$\mathbb{E}\big(Y_t^N|Y_0^N = y_N\big) = \mathbb{E}\big(X_{tN}^N/N|X_0^N = [Ny]\big) = \frac{[Ny]}{N}e^{(\lambda_N - \mu_N)Nt)}.$$

Or le membre de droite de la relation ci-dessus converge bien vers $\mathbb{E}(Y_t|Y_0 = y)$. De même, on peut vérifier la cohérence des expressions de la variance.

5. La fonction d'échelle S est de la forme $S(y) = d + ce^{-by/a}$. On a donc

$$\mathbb{P}_y(Y_T = r) = \frac{e^{-by/a} - e^{-br/a}}{e^{-bl/a} - e^{-br/a}} \xrightarrow[r\to+\infty]{} e^{b(l-y)/a} \in]0,1[.$$

Avec une probabilité $e^{b(l-y)/a}$, le processus Y issu de y tend vers l'infini sans avoir atteint l.

Exercice 3. *L'équation du télégraphe*

1. Ces relations sont évidentes. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par $(N_t)_{t\geq 0}$, X_0 et Y_0, alors $(N_{t+s} - N_t)_{s\geq 0}$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ puisque les accroissements du processus de Poisson sont indépendants et, bien entendu, V_t et X_t sont $\mathcal{F}_t$-mesurables. Donc, pour tout $w \in \{-v, v\}$ et A borélien de $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(V_{t+s} = w|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(V_{t+s} = w|V_t) \\ \mathbb{P}(V_{t+s} = w, X_{t+s} \in A|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(V_{t+s} = w, X_{t+s} \in A|(X_t, V_t)). \end{cases}$$

Les processus V et (V, X) sont markoviens mais X ne l'est pas.

2. Le processus Y reste en $w \in \{-v, v\}$ entre deux instants de saut de N (donc un temps exponentiel de paramètre α) puis saute en $-w$... On a donc

$$Lf(w) = \alpha(f(-w) - f(w)) \quad \text{ou} \quad L = (L_{ij})_{i,j\in\{-v,v\}} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

Le processus est irréductible et récurrent (espace d'états fini) donc il possède une unique mesure de probabilité invariante. Par symétrie, il est évident que c'est la mesure $\frac{1}{2}\delta_{-v} + \frac{1}{2}\delta_v$. Il est clair également que cette mesure est (l'unique) solution de $\nu L = 0$ avec ν mesure de probabilité.

3. Soit f régulière bornée, $t > 0$, $w \in \{-v, v\}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P_tf(w,x) =& \mathbb{E}(f(V_t, X_t)|V_0 = w, X_0 = x) \\ =& \mathbb{E}\big(f(V_t, X_t)\mathbf{1}_{\{N_t=0\}}|V_0 = w, X_0 = x\big) \\ &+ \mathbb{E}\big(f(V_t, X_t)\mathbf{1}_{\{N_t=1\}}|V_0 = w, X_0 = x\big) \\ &+ \mathbb{E}\big(f(V_t, X_t)\mathbf{1}_{\{N_t\geq 2\}}|V_0 = w, X_0 = x\big). \end{aligned}$$

Estimons ces trois espérances séparément. Puisque f est bornée,

$$\big|\mathbb{E}\big(f(V_t, X_t)\mathbf{1}_{\{N_t\geq 2\}}|V_0 = w, X_0 = x\big)\big| \leq C\mathbb{P}(N_t \geq 2) = Ce^{-\alpha t}\sum_{k\geq 2}\frac{(\alpha t)^2}{k!} \leq C\alpha^2 t^2.$$

D'autre part, si $N_t = 0$, c'est que, pour tout $s \in [0,t]$, $V_s = w$ et $X_s = x + ws$. En particulier,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(f(V_t, X_t)\mathbf{1}_{\{N_t=0\}}|V_0 = w, X_0 = x\big) &= \mathbb{E}\big(f(w, x+wt)\mathbf{1}_{\{N_t=0\}}|V_0 = w, X_0 = x\big) \\
&= f(w, x+wt)e^{-\alpha t} \\
&= f(w,x) + w\partial_x f(w,x)t - \alpha f(w,x)t + o(t).
\end{aligned}$$

Enfin, si $N_t = 1$, c'est que le processus de Poisson a sauté une et une seule fois dans l'intervalle $[0,t]$, disons au temps S. On a donc $V_t = -w$ et $X_t = x + wS - w(t-S)$. De plus, la loi de S est la loi uniforme sur $[0,t]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(f(V_t, X_t)\mathbf{1}_{\{N_t=1\}}|V_0 = w, X_0 = x\big) &= \mathbb{E}\big(f(-w, x+2wS-wt)\mathbf{1}_{\{N_t=1\}}|V_0 = w, X_0 = x\big) \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}\big(f(-w, x+2ws-wt)\mathbf{1}_{\{N_t=1\}}|V_0 = w, X_0 = x\big)\, ds
\end{aligned}$$

Puisque $f(-w, x+2ws-wt) = f(-w,x) + \partial_x f(-w,x)(2ws - wt) + o(t)$, et $\mathbb{P}(N_t = 1) = \alpha t + o(t)$, on obtient

$$\mathbb{E}\big(f(V_t, X_t)\mathbf{1}_{\{N_t=1\}}|V_0 = w, X_0 = x\big) = f(-w,x)\alpha t + o(t).$$

En conclusion,

$$P_t f(w,x) = f(w,x) + w\partial_x f(w,x)t + \alpha(f(-w,x) - f(w,x))t + o(t),$$

ce qui fournit le résultat demandé.

4. Puisque $(P_t)_t$ est un semi-groupe de Markov homogène,

$$\partial_t P_t\phi(v,x) = AP_t\phi(v,x) = \alpha(P_t\phi(-v,x) - \phi(v,x)) + v\partial_x P_f\phi(v,x),$$

c'est-à-dire que

$$\partial_t u^+(t,x) = \alpha(u^-(t,x) - u^+(t,x)) + v\partial_x u^+(t,x). \tag{1}$$

De même,

$$\partial_t P_t\phi(-v,x) = AP_t\phi(-v,x) = \alpha(P_t\phi(v,x) - \phi(-v,x)) - v\partial_x P_f\phi(-v,x),$$

c'est-à-dire que

$$\partial_t u^-(t,x) = \alpha(u^+(t,x) - u^-(t,x)) - v\partial_x u^-(t,x). \tag{2}$$

5. La demi-somme $((1) + (2))/2$ fournit l'équation

$$\partial_t u(t,x) = v\partial_x w(t,x), \tag{3}$$

tandis que la demi-différence $((1) - (2))/2$ donne quant à elle

$$\partial_t w(t,x) = -2\alpha w(t,x) + v\partial_x u(t,x). \tag{4}$$

Enfin, dériver (3) par rapport à t et (4) par rapport à x permet de supprimer le terme $\partial_t\partial_x w(t,x)$ pour obtenir

$$\partial^2_{tt} u(t,x) = -2\alpha v\partial_x w(t,x) + v^2\partial^2_{xx} u(t,x).$$

Il reste alors à remplacer $v\partial_x w(t,x)$ par $\partial_t u(t,x)$ d'après (3) pour obtenir l'équation du télégraphe.