Modèles markoviens en biologie

Examen du 27 mars 2007

Les trois exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre certains résultats donnés dans le sujet pour répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. *Modèle du votant*
On souhaite modéliser la contagion concurrente de deux opinions dans une population finie de taille N répartie autour d'un lac. On suppose que les individus sont immobiles et en interaction directe leur deux voisins immédiats. Les partisans de l'opinion A (resp. B) sont affublés du numéro 1 (resp. 0). Dans toute la suite on fait les hypothèses suivantes :

- chaque individu influence directement ses voisins et eux seulement,
- l'influence est positive : un individu a tendance à rallier son voisin à son opinion,
- tous les individus de même type ont le même pouvoir d'influence,
- l'opinion A (resp B) a un taux de conviction $1+\alpha$ (resp. 1), avec $\alpha \geq 0$,
- un seul individu peut changer d'opinion en un instant donné.

On représente les N individus comme les N éléments de $E = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Les points x et y de E sont voisins (on note $x \sim y$) si et seulement si $|x-y|$ est égal à 1 modulo N. On dit que $x \in E$ est un site. L'opinion de la population (on parle de configuration) à un instant donné est un élément de $F = \{0,1\}^E$. Soit une configuration $\eta \in F$, alors $\eta(x)$ vaut 1 si l'individu placé au site x est proA et 0 s'il est proB.

Puisque seul un individu peut changer d'opinion à un instant donné, l'opinion de la population ne peut donc passer d'une configuration η à une configuration ξ que si celle-ci diffère de η en exactement un site. Pour $\eta \in F$ et $x \in E$, nous noterons η_x la configuration η changée au site x :

$$\eta_x(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{si } y \neq x, \\ 1-\eta(x) & \text{si } y = x. \end{cases}$$

Soit $\eta \in F$. On note $M_\eta(x)$ le nombre de voisins de x d'opinion contraire :

$$M_\eta(x) = \sum_{y \sim x} \mathbf{1}_{\{\eta(y) \neq \eta(x)\}} \in \{0,1,2\}.$$

1. Montrer que, pour toute configuration $\eta \in F$, le nombre de conflits (nombre d'arêtes non orientées reliant des individus d'opinions différentes) que l'on notera C_η vérifie

$$C_\eta = \sum_{x,\ \eta(x)=1} M_\eta(x) = \sum_{x,\ \eta(x)=0} M_\eta(x).$$

On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov à temps discret sur F associée à la matrice de transition P suivante :

- si η est diférrente de $(0,0,\ldots,0)$ et $(1,1,\ldots,1)$, alors

$$P(\eta,\xi) := \mathbb{P}(X_{n+1}=\xi | X_n=\eta) = \begin{cases} \dfrac{M_\eta(x)}{(2+\alpha)C_\eta} & \text{si } \exists x \in E,\ \xi = \eta_x \text{ et } \eta(x)=1, \\ \dfrac{(1+\alpha)M_\eta(x)}{(2+\alpha)C_\eta} & \text{si } \exists x \in E,\ \xi = \eta_x \text{ et } \eta(x)=0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

- si $\eta = (0,0,\ldots,0)$ ou $\eta = (1,1,\ldots,1)$ alors $P(\eta,\eta)=1$ et $P(\eta,\xi)=0$ si $\xi \neq \eta$.

On notera $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration engendrée par $(X_n)_{n\geq 0}$.

2. On suppose que $N = 8$, $\alpha = 2$ et $\eta = (0,0,1,1,0,0,0,1)$. Calculer $M_\eta(x)$ pour tout $x \in E$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = \eta_y | X_n = \eta)$ pour tout $y \in E$.
3. Que dire des configurations $(0,\dots,0)$ et $(1,\dots,1)$?
4. La chaîne de Markov X est-elle irréductible ? récurrente ? Possède-t-elle des états absorbants ? Que dire du comportement en temps long de X ?

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{x\in E} X_n(x)$ le nombre de sites de la configuration X_n qui ont la valeur 1.

5. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\{0,\dots,N\}$ de matrice de transition
$$Q(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1+\alpha}{2+\alpha} & \text{si } 1 \leq i \leq N-1 \text{ et } j = i+1, \\ \dfrac{1}{2+\alpha} & \text{si } 1 \leq i \leq N-1 \text{ et } j = i-1, \\ 1 & \text{si } i \in \{0,N\} \text{ et } j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On notera pour simplifier $p = (1+\alpha)/(2+\alpha)$ et $q = 1-p$.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Montrer que si $\alpha > 0$ alors $((q/p)^{S_n})_n$ est une martingale.
8. On note $T = \inf\{n \in \mathbb{N},\ S_T \in \{0,N\}\}$. Pour $k \in \{0,1,\dots,N\}$, calculer $\mathbb{P}(S_T = N | S_0 = k)$ et $\mathbb{E}(T|S_0 = k)$.
9. Soit $(\alpha_N)_{N\geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour tout N, on considère le modèle ci-dessus où α est remplacé par α_N. On suppose à présent que N est très grand. Dans les trois cas suivants : $\alpha_N = 0$, α_N constant et $\alpha_N = \beta/\sqrt{N}$, proposer une renormalisation adéquate de S^N pour mettre en évidence une convergence vers un processus de diffusion X dont on précisera les caractéristiques. On donnera en particulier les coefficients de l'EDS satisfaite par X et une expression des probabilités et temps d'absorption.

Exercice 2. *Croissance d'une population*
On souhaite comprendre le comportement d'une population de grande taille qui se reproduit vite (bactéries, mouches, ...). Chaque individu meurt avec un taux μ et se dédouble avec un taux λ indépendamment de ses congénères. On suppose $\lambda > \mu$. On note $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus taille de la population, $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de ce processus et L son générateur infinitésimal.

1. Montrer que L est donné par
$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \quad L(i,j) = \begin{cases} i\lambda & \text{si } j = i+1, \\ i\mu & \text{si } j = i-1, \\ -i(\lambda+\mu) & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. On note f la fonction $n \mapsto n$ et g la fonction $n \mapsto n^2$. Exprimer Lf et Lg en fonction de f et g. En déduire que $t \mapsto P_t f$ et $t \mapsto P_t g$ sont solutions d'équations différentielles linéaires que l'on résoudra. En déduire que, pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}(X_t|X_0 = n) = ne^{(\lambda-\mu)t} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_t|X_0 = n) = n\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right).$$
Calculer l'espérance et la variance de X_t si X_0 suit une loi initiale d'espérance m et de variance σ^2.

On considère deux suites $(\lambda_N)_{N\geq 1}$ et $(\mu_N)_{N\geq 1}$ de réels positifs et on note $(X^N)_t$ le processus associé comme ci-dessus aux paramètres λ_N et μ_N. On pose $(Y_t^N)_{t\geq 0} = (X_{Nt}^N/N)_{t\geq 0}$.

3. Déterminer le générateur infinitésimal A_N de Y^N.
4. Soit a et b deux réels strictement positifs. Donner une condition sous laquelle la suite de processus $(Y^N)_N$ converge vers le processus de diffusion Y de générateur infinitésimal A défini, pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, par
$$Af(y) = byf'(y) + ayf''(y).$$
De quelle équation différentielle stochastique Y est-il solution ?
5. Calculer l'espérance et la variance de Y_t lorsque $Y_0 = y$. Est-ce cohérent avec la question 2 ?
6. Soit I l'intervalle $]l, r[$ inclus dans $\mathbb{R}_*^+$ et $x \in I$. Calculer la probabilité que Y sorte de I en r partant de x. Quelle est la limite de cette quantité lorsque r tend vers $+\infty$? Que cela signifie-t-il ?

Exercice 3. *L'équation du télégraphe*
L'objet de cet exercice est de proposer une résolution probabiliste de l'équation aux dérivées partielles suivante dite équation du télégraphe : soit α et v deux réels strictement positifs et ϕ positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on cherche une fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - v^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + 2\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0 & \text{pour tous } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \phi(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$
Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité α et V_0 et X_0 deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans $\{-v, v\}$ et $\mathbb{R}$ indépendantes de $(N_t)_{t\geq 0}$. On définit le processus $((V_t, X_t))_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\{-v, v\} \times \mathbb{R}$ en posant, pour tout $t \geq 0$
$$V_t = (-1)^{N_t} V_0 \quad \text{et} \quad X_t = X_0 + \int_0^t V_s \, ds.$$
Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1 (Kac) *La solution de l'équation (1) se représente ainsi : pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$u(t,x) = \mathbb{E}(\phi(X_t)),$$
où $X_0 = x$ presque sûrement et V_0 suit la loi $\frac{1}{2}\delta_{-v} + \frac{1}{2}\delta_v$.

1. Vérifier les relations suivantes :
$$V_{t+s} = (-1)^{N_{t+s} - N_t} V_t \quad \text{et} \quad X_{t+s} = X_t + V_t \int_0^s (-1)^{N_{t+u} - N_u} \, du.$$
En déduire que V et (V, X) sont des processus de Markov homogènes. Est-ce aussi le cas de X ?
2. Déterminer le générateur infinitésimal L de $(V_t)_{t\geq 0}$. Ce processus possède-t-il une unique mesure de probabilité invariante ? Si oui, quelle est-elle ?
3. Montrer que le générateur infinitésimal A de (V, X) est donné par
$$\forall (w,x) \in \{-v, v\} \times \mathbb{R}, \quad Af(w,x) = \alpha(f(-w,x) - f(w,x)) + w\partial_x f(w,x),$$
où $f : \{-v, v\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en sa deuxième variable.
4. Notons $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de (V, X) associé à A. On définit u^+ et u^- sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ par
$$u^+(t,x) = P_t\phi(v,x) \quad \text{et} \quad u^-(t,x) = P_t\phi(-v,x).$$
Montrer que (u^+, u^-) est solution du système d'équations :
$$\begin{cases} \partial_t u^+(t,x) = \alpha(u^-(t,x) - u^+(t,x)) + v\partial_x u^+(t,x) \\ \partial_t u^-(t,x) = \alpha(u^+(t,x) - u^-(t,x)) - v\partial_x u^-(t,x). \end{cases}$$
5. Enfin, on pose $u = (u^+ + u^-)/2$ et $w = (u^+ - u^-)/2$. Montrer que (u, w) est solution d'un système de deux équations aux dérivées partielles. En déduire que u est solution de l'équation du télégraphe (1).