Université d'Oran, MasterII
Amine Asselah et Djalil Chafai
Chaines de Markov (2010 - 2011)

–Programme des Cours–

Ce cours est une introduction aux chaines de Markov. Nous suivrons un livre de Pablo Ferrari et Antonio Galves.

- Dimanche 13 mars :
  - 8:30-10:30h DC Chapitre 1 (Définition et exemples)
  - 11h-12h séminaire : Modele de croissance d'un nuage aléatoires de points AA.
  - 13:30h-16:30h AA Chapitre 2 (Mesures invariantes)
- Lundi 14 mars
  - 8:30h-10:30h AA Chapitre 3 (Couplage, et convergence)
  - 11h-12h séminaire: Chanes de Markov aléatoires DC.
  - 14h-17h DC Chapitre 4 (Régénération+Markov fort)
- Mardi 15 mars
  - 8:30-10:30h AA Chapitre 4 (Simulation parfaite)
  - 11h-13h DC Exemple de convergence abrupte (cutoff)

Feuille d'exercices –

Exercice 1: Soit la matrice de transition

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire une règle F associée à la matrice Q_1.
2. Est-ce que Q_1 est irréductible?

Exercice 2: Soit $Q_2 = \{Q(x,y),\ x,y \in \mathbb{N}\}$, une chaine de Markov sur $\mathbb{N}$ avec

- $Q_2(x, x+1) = 1/3$, pour $x \geq 0$.
- $Q_2(x, x-1) = 2/3$ pour $x > 0$.
- $Q_2(0,0) = 2/3$ $Q_2(x,x) = 0$ pour tout x, et $Q_2(x,y)$ si $|x-y| > 1$.

Construire deux règles distinctes qui génère Q_2. On rappelle que le coefficient d'ergodicité est

$$\beta(Q) = \sum_{x \in E} \inf_{y \in E} Q(y,x), \quad \text{(où } E \text{ est l'espace des états).}$$

1. Calculer $\beta(Q_1)$ et $\beta(Q_2)$.
2. Donner un exemple de chaine irréductible sur $\mathbb{N}$ telle que $\beta(Q) > 0$.
3. Soit
$$\alpha(Q) = \inf_{a,b \in E} \sum_{x \in E} \min(Q(a,x), Q(b,x)).$$
Montrer que $\alpha(Q) \geq \beta(Q)$, et donner un exemple ou $\alpha(Q) > \beta(Q) = 0$.

Exercice 3: Soit $p \in]\frac{1}{2}, 1[$ et $q = 1-p$ (noter que $p > q > 0$). Soit la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ donnée par la matrice suivante.

- ▷ $q(0,0) = p$ et $q(0,1) = q$.
- ▷ Pour tout entier $n > 0$, $q(n, n-1) = p$ et $q(n, n+1) = q$.

1. Faire un diagramme de la chaîne de Markov, et écrire une règle $F : \mathbb{N} \times [0,1] \to \mathbb{N}$ qui décrit la chaîne de Markov.
2. Cette chaîne est-elle irréductible? (Justifier!)
3. On rappelle qu'une probabilité ν est réversible pour la chaîne de matrice $Q = (q(x,y))$, si $\nu(x)\ q(x,y) = \nu(y)\ q(y,x)$ pour tous les x, y distincts de l'espace. Trouver une probabilité invariante pour notre chaîne.
4. Calculer le coefficient d'ergodicité $\beta(Q)$.

5. Imaginer un couplage tel que si $x \geq y$, alors $X_n^x \geq X_n^y$, pour tout n.

6. Soit τ_1^x le premier temps où la chaîne X_n^x atteind l'état 1. Pour $x > y$, montrer à l'aide d'un couplage que
$$P(X_n^x \neq X_n^y) \leq P(\tau_1^x > n).$$

7. Montrer que tant que X_n^x n'atteind pas 1 (donc sur l'évènement $\{\tau_1^x > n\}$), on peut écrire $X_n^x - x$ comme une somme de n variables indépendantes de moyenne $-(p-q)$. Borner $P(\tau_1^x > n)$, pour $n \geq 2(p-q)x$, de façon à voir que cette quantité tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4: Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chane de Markov sur un espace d'état E dénombrable avec la matrice de transition Q. Notons $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. Supposons pour tout $a, b \in E$, il existe un couplage (X_n^a, X_n^b) partant de a et b. Soit T un temps d'arrt. Supposons

$$T < \infty \quad p.s. \qquad \text{et} \qquad X_n^a = X_n^b \quad \forall n \geq T.$$

Nous supposons que $f : \mathbb{N} \times E \to \mathbb{R}$ est une fonction *harmonique en temps-espace*, i.e., une fonction vérifiant
$$f(m,x) = \sum_{y \in E} Q^n(x,y) f(m+n, y).$$

1. Fixons $m \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\mathbb{E}\big(f(m+n+1, X_{n+1}) | X_n\big) = \sum_{y\in E} Q(X_n, y) f(m+n+1, y).$$

2. En déduire que pour m fixé, $f(m+n, X_n)$ est une martingale.

3. En déduire que pour tout m, a
$$f(m,a) = \mathbb{E}\big(f(m+n, X_n^a)\big).$$

4. En déduire que
$$f(m,a) - f(m,b) = \mathbb{E}\Big(\big(f(m+n, X_n^a) - f(m+n, X_n^b)\big) \cdot 1_{\{T>n\}}\Big).$$

5. Supposons f est bornée. En déduire que pour m fixé, la fonction $f(m,x)$ de x est constante.

6. En utilisant la propriété de la fonction harmonique en temps-espace, déduire que f est constante.

Exercice 5 (continuation de l'Exercice 4) Soit $\mathcal{G}_n$ la tribu
$$\sigma\Big(\{(x_n)_{n\geq 0} : x_{n+1} \in B_{n+1}, \cdots x_{n+m} \in B_{n+m}\} : \; B_{n+1}, \cdots, B_{n+m} \subset E, m \geq 1\Big).$$

La tribu de queue est définie par $\mathcal{G} = \cap_{n\geq 0} \mathcal{G}_n$. L'opérateur de décalage $\theta : E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$ est défini par
$$\theta : \; (x_0, x_1, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots).$$

1. Vérifier que pour $A \in \mathcal{G}$,

$$\{X^a \in \theta^n A\} = \{(X^a_m, X^a_{m+1}, \dots) \in \theta^{m+n} A\},$$

o $X^a = (X^a_n)_{n \geq 0}$. En déduire que

$$\mathbb{P}(X^a \in \theta^n A) = \mathbb{E}\big(f(m+n, X^a_m)\big).$$

2. Soit $g(n,x) := \mathbb{P}(X^x \in \theta^n A)$. Montrer que g est harmonique en temps-espace et que

$$\mathbb{E}\big(1_{\{X^a \in A\}} | \mathcal{F}_n\big) = g(n, X^a_n).$$

3. Par le 2) de l'Exercice 3, en appliquant le théorème de convergence des martingales, montrer que $1_{\{X^a \in A\}}$ est la limite de $g(n, X^a_n)$.

4. D'après le 6) de l'Exercice 3, montrer que

$$\mathbb{P}(X^a \in A) = 0 \text{ ou } 1.$$