Temps d'atteinte

X MAP 432 PC 17

Automne 2013

Théorème 1 (Majoration géométrique uniforme de la queue du temps d'atteinte)**.** *Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E fini, de noyau P. Soit $A \subset E$ et*

$$\tau = \min\{n \geq 1 : X_n \in A\}.$$

S'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\alpha := \min_{x\in A^c} P^m(x, A) > 0$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \max_{x\in A^c} \mathbb{P}_x(\tau > km) \leq (1-\alpha)^k.$$

Note : $P^m(x, A) = \sum_{y\in A} P^m(x, y) = \mathbb{P}_x(X_m \in A)$, et $1 - \alpha = \max_{x\in A^c} P^m(x, A^c) < 1$.

Du théorème, on obtient, en notant $c = (1-\alpha)^{-1}$ et $\rho = -\frac{\log(1-\alpha)}{m} > 0$,

$$\forall x \in A^c,\ \forall u \geq 0, \quad \mathbb{P}_x(\tau > u) \leq \mathbb{P}_x(\tau > \lfloor u/m \rfloor m) \leq (1-\alpha)^{\lfloor u/m \rfloor} \leq (1-\alpha)^{u/m-1} = ce^{-\rho u}.$$

En particulier, on a les propriétés suivantes, ordonnées de la plus faible à la plus forte :

— Finitude presque sûre : $\forall x \in A^c$, $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$;

— Intégrabilité (moment d'ordre 1) : $\forall x \in A^c$, $\mathbb{E}_x(\tau) < \infty$;

— Intégrabilité exponentielle (moment exponentiel) : $\forall x \in A^c$, $\forall \theta < \rho$, $\mathbb{E}_x(e^{\theta\tau}) < \infty$.

Preuve par couplage avec un jeu de pile ou face. Réduction initiale. On se ramène au cas $m = 1$ en considérant la chaîne de Markov $X^{(m)} = (X_n^{(m)})_{n\geq 0} = (X_{mn})_{n\geq 1}$ de noyau P^m. Comme X peut atteindre A en un instant qui n'est pas multiple de m, on a $m\tau^{(m)} \geq \tau$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_x(\tau > km) \leq \mathbb{P}_x(m\tau^{(m)} > km) = \mathbb{P}_x(\tau^{(m)} > k).$$

Idée du couplage. On peut donc supposer que $m = 1$. L'idée maintenant est que la chaîne, en quelque sorte, joue à pile ou face à chaque étape pour tenter d'atteindre A, avec une pièce dont la probabilité de gagner est toujours $\geq \alpha$ (la pièce peut changer à chaque fois). Dans ce cas, la chaîne atteindra A avant un joueur de pile ou face dont la pièce gagnerait avec probabilité α (et le temps de premier succès au jeu de pile ou face suit une loi géométrique). On dit que le jeu de pile ou face est couplé avec notre chaîne de Markov. Cela donne $\tau \leq G$ où G est une variable aléatoire géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre α, d'où $\mathbb{P}_x(\tau > k) \leq \mathbb{P}_x(G > k) = (1-\alpha)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Morale : repérer un modèle simple caché dans un modèle plus complexe est utile !

Mise en œuvre. La construction explicite du jeu de pile ou face sur le même espace que la chaîne de Markov peut se faire en utilisant une suite récurrence aléatoire $(Y_n)_{n\geq 0}$ de même noyau P que X, définie par $Y_{n+1} = f(Y_n, U_{n+1})$ où $(U_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendantes de Y_0. On ordonne E de sorte que $x < y$ pour tout $x \in A$ et $y \in A^c$. Pour tout $x \in E$, soit $(I_{x,y})_{y\in E}$ une partition de $[0, 1]$ telle que $\mathbb{P}(U_1 \in I_{x,y}) = P(x, y)$ pour tout $y \in E$. Grâce à l'ordre choisi sur E, l'ensemble $\cup_{y\in A} I_{x,y}$ est un intervalle de la forme $[0, u_x]$. Par hypothèse, on a $u_x = \mathbb{P}(U_1 \leq u_x) = P(x, A) \geq \alpha$ pour tout $x \in A^c$, et en fait $\min_{x\in A^c} u_x = \alpha > 0$. Faire un dessin avec un intervalle pour chaque ligne de P ! À présent on pose $Z_n = \mathbf{1}_{U_n \leq \alpha}$ pour tout $n \geq 1$. Alors $(Z_n)_{n\geq 1}$ est un jeu de pile ou face de paramètre α, et

$$\tau \overset{\text{loi}}{=} \min\{n \geq 1 : Y_n \in A\} \leq \min\{n \geq 1 : U_n \leq \alpha\} = \min\{n \geq 1 : Z_n = 1\} =: G.$$

Il faut bien sûr que Y_0 soit choisie de même loi que X_0, et portée par A^c. $\square$

Preuve par récurrence. Par récurrence sur k. La propriété est vraie pour $k=0$ car $(1-\alpha)^0=1$. Notons que $\{\tau > km\} = \{X_1 \in A^c, \dots, X_{km} \in A^c\}$. Pour passer de $k \geq 0$ à $k+1$ on écrit, en utilisant en $\star$ l'indépendance du passé et du futur sachant le présent fixé $\{X_{km}=y\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau > (k+1)m) &= \mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km} \in A^c, X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c) \\
&= \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km} = y, X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c) \\
&= \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}(\tau > km, X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c \,|\, X_{km} = y) \frac{\mathbb{P}(X_{km}=y)}{\mathbb{P}(X_0=x)} \\
&\overset{\star}{=} \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}(\tau > km \,|\, X_{km}=y) \mathbb{P}(X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c \,|\, X_{km} = y) \frac{\mathbb{P}(X_{km}=y)}{\mathbb{P}(X_0=x)} \\
&= \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km}=y) \mathbb{P}(X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c \,|\, X_{km} = y) \\
&\leq \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km}=y) \mathbb{P}(X_{km+m} \in A^c \,|\, X_{km} = y) \\
&= \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km}=y) P^m(y, A^c) \\
&\leq (1-\alpha) \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km}=y) \\
&= (1-\alpha)\mathbb{P}_x(\tau > km).
\end{aligned}$$

(valable pour tout $x \in A^c$). □

Étant donné que $\{\tau > km\} = \{X_1 \in A^c, \dots, X_{km} \in A^c\}$, on peut se demander pourquoi on ne prend pas pour présent $\{X_{km+1}=y\}$, au lieu de $\{X_{km}=y\}$. En fait, le conditionnement au temps km permet de faire apparaître exactement $P^m(y, A^c)$, et donc $1-\alpha$.

Variante de la preuve par récurrence. Comme $\{X_0 = x, \tau > km, X_{km} = y\} \in \sigma(X_0, \dots, X_{km})$, on obtient, en utilisant en $\star\star$ le fait que le futur, sachant le présent fixé $\{X_{mk} = x\}$, et un événement passé comme $\{X_0 = x, X_1 \in A^c, \dots, X_{km-1} \in A^c\}$, ne dépend que du présent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau > (k+1)m) &= \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km} = y, X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c) \\
&= \sum_{y \in A^c} \frac{\mathbb{P}(X_0 = x, \tau > km, X_{km} = y, X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c)}{\mathbb{P}(X_0=x)} \\
&\overset{\star\star}{=} \sum_{y \in A^c} \frac{\mathbb{P}(X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c \,|\, X_{km} = y)\mathbb{P}(X_0 = x, \tau > km, X_{km}=y)}{\mathbb{P}(X_0=x)} \\
&= \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}(X_{km+1} \in A^c, \dots, X_{km+m} \in A^c \,|\, X_{km} = y)\mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km}=y) \\
&\leq \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}(X_{km+m} \in A^c \,|\, X_{km} = y)\mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km}=y) \\
&= \sum_{y \in A^c} P^m(y, A^c)\mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km}=y) \\
&\leq (1-\alpha) \sum_{y \in A^c} \mathbb{P}_x(\tau > km, X_{km}=y) \\
&= (1-\alpha)\mathbb{P}_x(\tau > km).
\end{aligned}$$

(valable pour tout $x \in A^c$). □

Évidemment, on aurait pu se contenter du cas $m=1$ dans les preuves par récurrence, ce qui réduit la taille des formules et rend superflue l'une des inégalités.