Projet X-MAP-311-2012-CHAFAI-4

Processus de taille de fenêtre TCP

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2011-2012

Le débit instantané maximal sortant d'un ordinateur connecté à un réseau TCP/IP comme Internet est régulé par l'algorithme suivant : le débit maximal est augmenté de manière déterministe d'une unité à chaque pas de temps, et en cas de signal de congestion, il est multiplié par un facteur entre $[0,1[$, typiquement $1/2$. Ce mécanisme simple, parfois qualifié de AIMD (Additive Increase, Multiplicative Decrease) permet à la fois une bonne exploitation du réseau et une réaction efficace en cas de congestion.

Modélisation des temps de congestion

Plaçons-nous du point de vue d'un ordinateur fixé, et modélisons les temps d'arrivée des signaux de congestion par une suite $T_1 \leq T_2 \leq T_2 \leq \cdots$ de variables aléatoires positives séparées par des durées aléatoires $T_1 - 0, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. Le nombre de congestions dans l'intervalle $[0, t]$ est donné par la variable aléatoire de comptage (à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$)

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) = \sup\{n \in \mathbb{N}^* : T_n \leq t\}.$$

On a $N_0 = 0$ et la courbe aléatoire $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto N_t$ est croissante.

Q1 Simuler les trajectoires du processus au moyen du logiciel Scilab ;

Q2 Discuter de la pertinence du choix de la loi exponentielle ;

Q3 Montrer que pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire N_t suit la loi de Poisson de moyenne λt, et en déduire que presque sûrement, pour tout $t \geq 0$, on a $N_t < \infty$;

Q4 Montrer que le processus à temps continu et à valeurs entières $N := (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est bien défini, que ses trajectoires sont continues à droite avec limites à gauche, constantes par morceaux, avec des sauts d'amplitude $+1$, et des plateaux de longueurs aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ ;

Q5 Montrer que pour toute suite finie de réels $t_0 := 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ les variables aléatoires $N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda(t_1 - t_0), \ldots, \lambda(t_n - t_{n-1})$;

Q6 Proposer une méthode d'estimation du paramètre λ ;

Modélisation de la taille de fenêtre TCP

Nous allons à présent introduire un modèle idéalisé du mécanisme TCP décrit précédemment. Par commodité, on pose $T_0 = 0$. Soit $Q = (Q_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0,1[$ de même loi $\mathcal{Q}$. Soit X_0 une variable aléatoire positive. On suppose que X_0, N, et Q sont indépendants. On définit le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à temps continu et à espace d'états $\mathbb{R}_+$ de la manière suivante :

$$X_t = \begin{cases} X_{T_n} + t - T_n & \text{si } T_n \leq t < T_{n+1}, \\ Q_{n+1}(X_{T_n} + T_{n+1} - T_n) & \text{si } t = T_{n+1}, \end{cases}$$

où $n = N_t \in \mathbb{N}$ est le nombre de sauts avant l'instant t. Les trajectoires de X sont affines de pente 1 par morceaux, continues à droite avec limite à gauche, et chaque saut correspond à une multiplication par un nombre entre $[0,1]$. Le processus X est connu sous le nom de processus TCP window-size car en informatique, le débit maximal sortant est réglé par une taille de « fenêtre TCP » (TCP window-size). Lorsque $\mathcal{Q} = \delta_0$ on dit que X est un processus « Growth Collapse ».

Q7 En utilisant le logiciel Scilab, simuler des trajectoires de X et tester numériquement la conjecture suivante : si $Q = \delta_q$ avec $0 \leq q < 1$, alors il existe une loi μ sur $\mathbb{R}_+$ telle que X_t converge en loi vers μ quand $t \to \infty$, quelque soit X_0 ;

Q8 Montrer que si $q = 0$ alors μ est la loi exponentielle de paramètre λ ;

Plaçons-nous dans le cas où $\mathcal{Q} = \delta_q$ avec $0 < q < 1$ et où $X_0 = x$ avec $x \geq 0$.

Q9 Montrer que sachant l'événement $\{N_t = n\}$, on a

$$X_t = \begin{cases} x + t & \text{si } n = 0, \\ q^n x + \sum_{k=1}^{n+1} q^{n-k+1}(U_k - U_{k-1}) & \text{si } n > 0, \end{cases}$$

où $0 = U_0 < U_1 < \cdots < U_n < U_{n+1} = t$ est une statistique d'ordre uniforme sur $[0,t]$. En déduire que $\mathcal{L}(X_t \,|\, N_t = 0) = \delta_{x+t}$, tandis que la loi $\mathcal{L}(X_t \,|\, N_t = n)$ est sans atomes si $n > 0$, portée par $[q^n x, q^n x + t]$;

Q10 Toujours sous les mêmes hypothèses, montrer que $\mu_t = \mathcal{L}(X_t \,|\, N_t > 0)$ est une loi sans atomes portée par $[0, qx + t]$;

Q11 En déduire que pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}(X_t) = e^{-\lambda t}\delta_{x+t} + (1 - e^{-\lambda t})\mu_t \quad \text{et} \quad \mathrm{dist}(x + t, \mathrm{supp}(\mu_t)) = (1 - q)x;$$

Q12 En déduire que le processus X entre dans tout intervalle en un temps fini avec probabilité positive, c'est-à-dire que sa trajectoire coupe toute bande horizontale en un temps fini avec probabilité positive (distinguer les cas où la bande est en dessus et en dessous de x).

Comportement en temps long

On souhaite établir que les trajectoires de X issues de conditions initiales différentes se rapprochent exponentiellement vite au fil du temps. Pour cela, on introduit une distance de couplage entre lois. Nous débutons par une notion de moments.

Q13 Montrer que si $p \geq 1$ est un réel fixé, (E,d) un espace métrique, et μ une loi sur E, alors la quantité $\int d(x,y)^p\,\mu(dy)$ est soit infinie pour tout $x \in E$, soit finie pour tout $x \in E$ (on dit dans ce cas que μ a un moment d'ordre p fini) ;

Q14 Si μ et ν sont deux lois sur E possédant un moment d'ordre $p \geq 1$ fini, on appelle distance de couplage $d_p(\mu,\nu)$ la quantité

$$d_p(\mu_1,\mu_2) = \inf_{\substack{(X,Y)\\ X_1\sim\mu_1\\ X_2\sim\mu_2}} \mathbb{E}(d(X,Y)^p)^{1/p} = \left(\inf_{\Pi\in\mathcal{C}(\mu_1,\mu_2)} \int_{E\times E} d(x,y)^p\,\Pi(dx,dy)\right)^{1/p}$$

où $\mathcal{C}(\mu_1,\mu_2)$ est l'ensemble convexe des lois sur $E\times E$ qui ont pour lois marginales μ_1 et μ_2. Montrer que $\mathcal{C}(\mu_1,\mu_2)$ est non vide et convexe ;

Q15 Considérons un couple (X,Y) où X et Y partent de x et y mais utilisent le même N et le même Q (mêmes temps de sauts et coefficients multiplicateurs). Montrer qu'au court du temps, la quantité $|X_t - Y_t|$ reste constante entre deux sauts et qu'au k^{e} saut elle est multipliée par Q_k. En déduire que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left(|X_t - Y_t|^p\right) = |x-y|^p\, e^{-\lambda t(1-\mathbb{E}(Q_1^p))};$$

Q16 En déduire que si X et Y sont deux processus TCP de paramètres λ et $\mathcal{Q}$ alors pour tous $\Pi \in \mathcal{C}(\mathcal{L}(X_0),\mathcal{L}(Y_0))$, $t\geq 0$, $p \geq 1$, avec $d(x,y)=|x-y|$ et $E=\mathbb{R}_+$,

$$d_p(\mathcal{L}(X_t),\mathcal{L}(Y_t))^p \leq e^{-\theta_p t}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} |x-y|^p\;\Pi(dx,dy));$$

Q17 En déduire que si $X=(X_t)_{t\geq 0}$ et $Y=(Y_t)_{t\geq 0}$ sont deux processus TCP de même paramètres λ et $\mathcal{Q}$ dont les lois initiales $\mathcal{L}(X_0)$ et $\mathcal{L}(Y_0)$ possèdent un moment d'ordre $p\geq 1$ fini alors pour tout $t \geq 0$, et en posant $\theta_p := \lambda(1-\mathbb{E}(Q_1^p))$, on a

$$d_p(\mathcal{L}(X_t),\mathcal{L}(Y_t)) \leq d_p(\mathcal{L}(X_0),\mathcal{L}(Y_0))\,\exp\left(-\frac{\theta_p t}{p}\right).$$

Étude du processus aux instants de saut

Les résultats précédents permettent d'établir la conjecture sur l'existence de la loi d'équilibre asymptotique μ de X en utilisant un peu de topologie. Afin de progresser dans notre étude basique de X, on s'intéresse aux valeurs du processus au moment des temps de saut, c'est-à-dire à la suite aléatoire $\widehat{X} := (\widehat{X}_n)_{n\geq 0} = (X_{T_n})_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Q18 Montrer que $\widehat{X}_0 = X_0$ et qu'on a la formule auto-regressive linéaire ($n \geq 0$)

$$\widehat{X}_{n+1} = Q_{n+1}(\widehat{X}_n + E_{n+1});$$

Q19 Établir par récurrence sur n l'identité en loi

$$\widehat{X}_n = Q_n \cdots Q_1 X_0 + \sum_{k=1}^{n} Q_n \cdots Q_{n-k+1} E_{n-k+1} \overset{d}{=} Q_1 \cdots Q_n X_0 + \sum_{k=1}^{n} Q_1 \cdots Q_k E_k.$$

Q20 Établir que quelque soit X_0, la suite $(\widehat{X}_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers

$$\widehat{\mu} = \mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_1 \cdots Q_n E_n\right);$$

Q21 Montrer que

$$\mathbb{E}(\widehat{X}_n) = \mathbb{E}(Q)^n \mathbb{E}(X_0) + \mathbb{E}(Q_1)\frac{1-\mathbb{E}(Q_1)^n}{\lambda(1-\mathbb{E}(Q_1))}.$$

et que $\widehat{\mu}$ a pour moyenne $\lambda^{-1}\mathbb{E}(Q_1)/\mathbb{E}(1-Q_1)$.

Q22 Simuler des trajectoires de X et $\widehat{X}$ avec le logiciel Scilab, et comparer μ et $\widehat{\mu}$;

Q23 Proposer une amélioration du modèle de taille de fenêtre TCP qui tient compte d'une taille maximale de fenêtre.