Projet X-MAP-311-2013-CHAFAI-1

Simulation de lois discrètes

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2012-2013

On s'intéresse à la simulation de loi de probabilités sur des ensembles discrets.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Connaissant les $p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$, $1 \le i \le n$, proposer un algorithme de simulation de X basé sur un générateur de la loi uniforme, et ne comportant qu'une seule boucle `for`. On présentera cet algorithme sous forme d'une fonction Scilab ;

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Quel est le coût moyen de cet algorithme (en nombre de tours de boucle) ? Peut-on améliorer les performances de l'algorithme en effectuant un tri préalable ? Quel est le coût moyen minimal qu'on peut obtenir de la sorte ?

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Peut-on utiliser cet algorithme pour une variable aléatoire prenant une infinité de valeurs ? Considérer par exemple le cas de la loi de Poisson ;

$\boxed{\textbf{Q4}}$ Dans le cas de la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, proposer un algorithme alternatif utilisant la fonction «partie entière». Exprimer cet algorithme au moyen d'une commande Scilab. Est-il plus performant que l'algorithme précédent ?

Loi uniforme sur les permutations

Soit $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique. Soient $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes avec U_i de loi uniforme sur $\{1, \ldots, i\}$ pour tout $1 \le i \le n$.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ Montrer que le produit de transpositions aléatoires $(1, U_1) \cdots (n, U_n)$ suit la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$;

$\boxed{\textbf{Q6}}$ En déduire un algorithme de simulation de permutations aléatoires uniformes. Implémenter cet algorithme en Scilab. Comparer avec `grand(n,'prm')`.

Loi uniforme sur les partitions

Soit Π_n l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n\}$, et $B_n := \mathrm{Card}(\Pi_n)$.

$\boxed{\textbf{Q7}}$ Montrer que $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ et $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ (avec $B_0 := 1$) ;

$\boxed{\textbf{Q8}}$ On pose $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$. Montrer que $G'(z) = \exp(z) G(z)$ puis que $G(z) = \exp(\exp(z) - 1)$ et en déduire que $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ (indication : loi de Poisson) ;

$\boxed{\textbf{Q9}}$ Soit K un entier aléatoire tel que $\mathbb{P}(K = k) = k^n / (k! e B_n)$. Sachant K, soient $C_1, \ldots, C_n$ des v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, K\}$. Montrer que la partition aléatoire de $\{1, \ldots, n\}$ obtenue en décidant que i et j sont dans le même bloc si et seulement si $C_i = C_j$ suit la loi uniforme sur Π_n ;

$\boxed{\textbf{Q10}}$ Implémenter cet algorithme en langage Scilab.