

Modélisation et simulation d'une revue

Proposé par Djalil Chafai

Second semestre 2012-2013

On s'intéresse à une revue scientifique qui publie des articles de recherche. Un auteur désirant publier son article dans la revue soumet son article au rédacteur en chef. Ce dernier confie l'évaluation de l'article à un rapporteur anonyme. Si le rapport est favorable, l'article est accepté pour publication dans la revue, et sinon il est rejeté.

On modélise les durées séparant les soumissions d'article par des variables aléatoires E_1, E_2, \dots . Le n^{e} article est donc soumis au temps $T_n := E_1 + \dots + E_n$. Le nombre d'articles soumis entre la création de la revue (instant 0) et l'instant $t \geq 0$ est donc donné par la variable aléatoire $N_t := \text{card}\{n : T_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n)$. On suppose à partir de maintenant que les E_n sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- Q1** Montrer que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt ;
- Q2** Les hypothèses faites sur les E_i sont-elles raisonnables ?
- Q3** Simuler des trajectoires du processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ avec Scilab (graphiques) ;
- Q4** Proposer un estimateur du paramètre λ à partir d'une observation T_1, \dots, T_n . Préciser biais et écart quadratique moyen. Donner un intervalle de confiance ;
- Q5** Proposer un test statistique permettant d'accepter ou de refuser l'hypothèse « les E_1, E_2, \dots sont i.i.d. de loi exponentielle ».

Visualisons la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ comme une suite de points sur \mathbb{R}_+ . On dit qu'il s'agit d'un processus ponctuel. À tout point T_n , nous associons à présent une v.a. réelle positive R_n qui représente la durée du travail du rapporteur et une v.a. de Bernoulli B_n qui représente l'avis du rapporteur (1=accepter, 0=rejeter). On suppose que les v.a. $\{E_n, R_n, B_n, n \geq 1\}$ sont indépendantes, avec $(R_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et $(B_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

- Q6** Simuler en Scilab l'évolution au court du temps du nombre d'articles soumis, acceptés, rejetés, et en cours d'évaluation (on attend de jolis graphiques) ;
- Q7** Que représente la v.a. $M_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) \mathbf{1}_{[t, \infty[}(T_n + R_n)$?
- Q8** Montrer que M_t suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$. Comment évolue la moyenne au court du temps ? Comparer avec les simulations ;
- Q9** Supposons à présent que pour la mise en place du premier numéro de la revue, le rédacteur en chef dispose de k articles soumis au temps 0. Montrer que le nombre de ces articles qui sont acceptés après le temps t suit une loi binomiale de taille k et de paramètre $pe^{-\mu t}$;
- Q10** Discuter des hypothèses d'indépendance et du choix des lois pour R_n et B_n .