Projet X-MAP-311-2014-CHAFAI-2
Équation de récurrence linéaire sur un signal

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2013-2014

On modélise un signal par un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs réelles et à temps discret indexé par $\mathbb{Z}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des processus de ce type tels que $X_t \in \mathrm{L}^2$, $\mathbb{E}(X_t) = 0$, et $\gamma_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s; X_t) = \gamma_X(s+h, t+h)$, pour tous $s, t, h \in \mathbb{Z}$. On note $\gamma_X(h) = \gamma_X(t, t+h)$, car le second membre ne dépend pas de t.

Q1 On dit que $Z \in \mathcal{S}$ est un bruit blanc lorsque $\gamma_Z(s,t) = 0$ si $s \neq t$. Donner plusieurs exemples de bruits blancs, à valeurs discrètes et à valeurs continues ;

Q2 Montrer que si $X \in \mathcal{S}$ alors $t \mapsto \mathbb{E}(X_t^2)$ est constante ;

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$ un bruit blanc et $\sigma^2 = \gamma_Z(0)$. On recherche un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$ vérifiant l'équation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t. \tag{ERL}$$

Q3 Montrer que si $|\varphi| < 1$ alors la formule $X_t := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k Z_{t-k}$ fait sens pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et constitue l'unique solution de (ERL) dans $\mathcal{S}$, tandis que si $|\varphi| > 1$ alors la formule $X_t := -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{-k} Z_{t+k}$ fait sens pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et constitue l'unique solution de (ERL) dans $\mathcal{S}$;

Q4 Montrer que si $|\varphi| = 1$ alors (ERL) n'a pas de solution dans $\mathcal{S}$ (raisonner par l'absurde et calculer une variance de deux manières) ;

Dans toute la suite, on suppose que $|\varphi| \neq 1$ et on note $X \in \mathcal{S}$ la solution de (ERL).

Q5 Produire des graphiques de trajectoires de X en utilisant Scilab ;

Q6 Exprimer γ_X en fonction de σ^2 et de φ ;

Q7 À partir de l'observation de $X_{t+1}, \ldots, X_{t+n}$, proposer un estimateur de $\gamma_X(0)$ et de $\gamma_X(1)$ et en déduire un estimateur de φ et de σ^2 ;

On note $\ell^1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \sum_{h\in\mathbb{Z}} |\alpha_h| < \infty\}$.

Q8 Montrer que si $\alpha \in \ell^1$ et $Y \in \mathcal{S}$ alors la formule $(F_\alpha Y)_t := \sum_{h\in\mathbb{Z}} \alpha_h Y_{t-h}$ fait sens pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et définit un élément de $\mathcal{S}$ noté $F_\alpha Y$;

Q9 Si $\alpha, \beta \in \ell^1$, montrer que la formule $(\alpha * \beta)_t := \sum_{h\in\mathbb{Z}} \alpha_h \beta_{t-h}$ fait sens pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et définit un élément noté $\alpha * \beta$ de ℓ^1. Montrer que $*$ possède un élément neutre noté e. Si $\alpha \in \ell^1$ est tel que $P_\alpha(z) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \alpha_h z^h$ est un polynôme, montrer que α est inversible dans $(\ell^1, *)$ ssi P_α n'a pas de racines de modules 1 dans $\mathbb{C}$;

Q10 Montrer que si $\alpha, \beta \in \ell^1$ et $Y \in \mathcal{S}$ alors $F_\alpha F_\beta Y = F_{\alpha*\beta} Y$. De plus, si $\alpha(h) = \mathbf{1}_{h=0} - \varphi \mathbf{1}_{h=1}$, résoudre l'équation $F_\alpha Y = Z$ en Y, et montrer que $X = Y$.