Projet X-MAP-311-2015-CHAFAI-1
Génétique des populations

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2014-2015

On considère l'évolution au cours du temps d'une population de taille fixe $N \geq 1$, dans laquelle chaque individu est soit de type A soit de type B. Pour tout $n \geq 0$, chacun des N individus de la génération $n+1$ est fabriqué en héritant du type d'un individu de la génération n tiré au hasard uniformément. Notons X_n le nombre d'individus de type A de la génération n.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tous $x_0, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, N\}$,
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \cdot \,|\, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = \cdot \,|\, X_n = x_n) = \mathrm{Binom}(N, x_n/N).$$
2. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout $n \geq 0$. (il s'agit d'une loi de conservation)
3. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ des v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Si $p \in [0,1]$ et $0 \leq k \leq N$, soit
$$u_k(p) = p^k(1-p)^{N-k}\binom{N}{k} \quad \text{et} \quad I_k(p) = [u_1(p) + \cdots + u_{k-1}(p), u_1(p) + \cdots + u_k(p)[.$$
Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ la suite aléatoire définie par $Y_0 = X_0$, et $Y_{n+1} = k$ si $U_{n+1} \in I_k(Y_n/N)$, pour tous $0 \leq k \leq N$ et $n \geq 0$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ a la loi de $(X_n)_{n\geq 0}$, et que
$$\rho := \min_{p\in[0,1]} \mathbb{P}(U_{n+1} \in I_0(p) \cup I_N(p)) = 2^{-N+1}.$$
4. En déduire que la variable aléatoire $T = \inf\{n \geq 0 : Y_n \in \{0, N\}\}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a une queue de distribution sous-géométrique : $\mathbb{P}(T \geq n) \leq (1-\rho)^n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, et que pour tout $0 \leq x \leq N$,
$$\mathbb{P}(X_T = N \,|\, X_0 = x) = 1 - \mathbb{P}(X_T = 0 \,|\, X_0 = x) = \frac{x}{N}.$$
6. Proposer un modèle incorporant un mécanisme de mutation $A \leftrightarrow B$, avant le mécanisme d'héritage, et calculer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n dans ce cas.
7. Écrire un programme informatique simulant des trajectoires de $(X_n)_{n\geq 0}$ par exemple. Produire de beaux graphiques et les commenter avec soin.