# Projet X-MAP-311-2015-CHAFAI-2
# Agrégation limitée par diffusion interne

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2014-2015

On s'intéresse à un phénomène de croissance aléatoire modélisée par une suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ de sous-ensembles aléatoires de $\mathbb{Z}$. On pose $A_0 = \{0\}$. Pour tout $n \geq 0$, conditionnellement à $A_0, \ldots, A_n$, on considère une marche aléatoire simple symétrique $S = (S_k)_{k\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$, issue de 0, et arrêtée lorsqu'elle sort de $A_n$, et on définit alors $A_{n+1}$ comme étant l'union de $A_n$ et du point où est sortie la marche $S$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $A_n$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$ vérifiant $\mathrm{card}(A_n) = n+1$, et que de plus, si $G_n = \min A_n$, $D_n = \max A_n$, $X_n = D_n + G_n$ alors
$$D_n = \frac{X_n + n}{2} \quad \text{et} \quad G_n = \frac{X_n - n}{2}.$$

2. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq 0 \leq b$ et $a \neq b$. Soit $(S_k)_{k\geq 0}$ est la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, issue de 0. Soit $T = \inf\{k \geq 0 : S_k \in \{a, b\}\}$. Montrer que $T$ est intégrable (et en particulier fini presque sûrement) et
$$\mathbb{P}(S_T = a) = 1 - \mathbb{P}(S_T = b) = \frac{b}{b-a} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T) = -ab;$$

3. Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tous $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$ avec $i_0 = 0$ et $-n \leq i_n \leq n$ et $|i_k - i_{k-1}| = 1$ pour tout $1 \leq k \leq n$,
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_n - 1 \,|\, X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \frac{n+2+i_n}{2(n+2)}$$
et
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_n + 1 \,|\, X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \frac{n+2-i_n}{2(n+2)}.$$

4. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ et $(Z_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par $Y_0 = Z_0 = 0$ et pour $n \geq 0$,
$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n + 2\mathbf{1}_{\{U_n < (n+2-Y_n)/2(n+2)\}} - 1 & \text{si } Y_n > 0, \\ 1 & \text{si } Y_n = 0, \end{cases}$$
et
$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n + 2\mathbf{1}_{\{U_n < 1/2\}} - 1 & \text{si } Z_n > 0, \\ 1 & \text{si } Z_n = 0. \end{cases}$$
Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ a la loi de $(|X_n|)_{n\geq 0}$ tandis que $(Z_n)_{n\geq 0}$ a la loi de la valeur absolue d'une marche aléatoire simple symétrique.

5. En déduire que presque sûrement $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$.

6. Écrire un programme dans le langage de programmation de votre choix simulant des trajectoires de $(A_n)_{n\geq 0}$. Produire de beaux graphiques et les commenter avec soin.