LGN et TCL randomisés

X MAP 432 PC 17

Automne 2013

Théorème 1 (Une version aléatoire de la LGN faible et du TCL)**.** *Si* $(X_n)_{n\geq 1}$ *sont des v.a.r.i.i.d. de carré intégrable, de moyenne* 0 *et de variance* 1*, et si* $(N_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *telle que* $\frac{1}{n}N_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c$ *où* $c>0$ *est une constante, alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{N_n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0,c).$$

Démonstration. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite déterministe de réels positifs telle que $\alpha_n \to \infty$, comme c'est le cas pour les suites $\sqrt{n}$ ou n. Recherchons des conditions qui assurent que

$$\frac{D_n}{\alpha_n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_n} X_k - \sum_{k=1}^{\lfloor cn \rfloor} X_k}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\delta > 0$ (choisi plus loin), comme les v.a.r. X_k sont i.i.d.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{|D_n|}{\alpha_n} > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{|D_n|}{\alpha_n} > \varepsilon\,;\, |N_n - \lfloor cn \rfloor| < \lfloor \delta n \rfloor\right) + \mathbb{P}\left(\frac{|D_n|}{\alpha_n} > \varepsilon\,;\, |N_n - \lfloor cn \rfloor| \geq \lfloor \delta n \rfloor\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq r\leq \lfloor \delta n \rfloor} \left|\sum_{k=1}^{r} X_k\right| > \varepsilon \alpha_n\right) + \mathbb{P}(|N_n - \lfloor cn \rfloor| \geq \lfloor \delta n \rfloor) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2\alpha_n^2}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{\lfloor \delta n \rfloor} X_k\right)^2\right) + \mathbb{P}(|N_n - \lfloor cn \rfloor| \geq \lfloor \delta n \rfloor) \\
&= \underbrace{\frac{\lfloor \delta n \rfloor}{\varepsilon^2\alpha_n^2}\mathbb{E}(X_1^2)}_{A} + \underbrace{\mathbb{P}(|N_n - \lfloor cn \rfloor| \geq \lfloor \delta n \rfloor)}_{B}.
\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité provient de l'inégalité maximale de Kolmogorov [1]. Pour tout $\delta > 0$ on a $B \to 0$ car $\frac{1}{n}N_n \to c$ en probabilité. À présent, si $\alpha_n = n$ alors $A \to 0$, tandis que si $\alpha_n = \sqrt{n}$, alors $A \to \mathbb{E}(X_1^2)\delta/\varepsilon^2$, qui est arbitrairement petit car $\delta > 0$ est arbitraire.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les résultats souhaités. Pour la LGN,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_n} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor cn \rfloor} X_k + \frac{D_n}{n} = \frac{\lfloor cn \rfloor}{n}\frac{1}{\lfloor cn \rfloor}\sum_{k=1}^{\lfloor cn \rfloor} X_k + \frac{D_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c\times 0 + 0 = 0.$$

tandis que pour le TCL, grâce au lemme de Slutsky [2],

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{N_n} X_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\lfloor cn \rfloor} X_k + \frac{D_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\lfloor cn \rfloor}{n}}\frac{1}{\sqrt{\lfloor cn \rfloor}}\sum_{k=1}^{\lfloor cn \rfloor} X_k + \frac{D_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,c).$$

□

1. Si $X_1,\ldots,X_n$ indépendantes et $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ alors $\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| \geq u) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{u^2}$, $\forall u > 0$.
2. Si $X_n \overset{\text{Loi}}{\to} X$ et $Y_n \overset{\mathbb{P}}{\to} y$ où y est une constante alors $f(X_n,y) \overset{\text{Loi}}{\to} f(X,y)$ pour toute f continue.