Matrices aléatoires

Quelques aspects

Djalil Chafaï

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

« Exposé Labex Bézout »
Mardi 13 décembre 2011

Menu de l'exposé

Menu de l’exposé

Menu de l'exposé

Menu de l'exposé

Trois sources historiques (WvW)

- Wishart $\approx$ 1925

Trois sources historiques (WvW)

- Wishart $\approx$ 1925
  - Matrices de covariances empiriques
    Estimateurs multivariés naturels
    Naissance de la statistique mathématique

Trois sources historiques (WvW)

- Wishart $\approx$ 1925
  - Matrices de covariances empiriques
    Estimateurs multivariés naturels
    Naissance de la statistique mathématique
- von Neumann et Goldstine $\approx$ 1945

Trois sources historiques (WvW)

- Wishart $\approx$ 1925
  - Matrices de covariances empiriques
    Estimateurs multivariés naturels
    Naissance de la statistique mathématique
- von Neumann et Goldstine $\approx$ 1945
  - Analyse numérique matricielle
    Invertibilité et conditionnement
    Naissance de l'informatique (ENIAC)

Trois sources historiques (WvW)

- Wishart $\approx$ 1925
  - Matrices de covariances empiriques
    Estimateurs multivariés naturels
    Naissance de la statistique mathématique
- von Neumann et Goldstine $\approx$ 1945
  - Analyse numérique matricielle
    Invertibilité et conditionnement
    Naissance de l'informatique (ENIAC)
- Wigner $\approx$ 1955

Trois sources historiques (WvW)

- Wishart $\approx$ 1925
  - Matrices de covariances empiriques
    Estimateurs multivariés naturels
    Naissance de la statistique mathématique
- von Neumann et Goldstine $\approx$ 1945
  - Analyse numérique matricielle
    Invertibilité et conditionnement
    Naissance de l'informatique (ENIAC)
- Wigner $\approx$ 1955
  - Physique nucléaire
    Mécanique quantique + mécanique statistique
    Développement de la physique atomique

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales
  - Équations de Painlevé et de Schrödinger

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales
  - Équations de Painlevé et de Schrödinger
- Présence forte en physique également

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales
  - Équations de Painlevé et de Schrödinger
- Présence forte en physique également
  - Localisation d'Anderson par exemple !

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales
  - Équations de Painlevé et de Schrödinger
- Présence forte en physique également
  - Localisation d'Anderson par exemple !
- Quelques champs applicatifs

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales
  - Équations de Painlevé et de Schrödinger
- Présence forte en physique également
  - Localisation d'Anderson par exemple !
- Quelques champs applicatifs
  - Échantillonnage compressant (Compressed Sensing)

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales
  - Équations de Painlevé et de Schrödinger
- Présence forte en physique également
  - Localisation d'Anderson par exemple !
- Quelques champs applicatifs
  - Échantillonnage compressant (Compressed Sensing)
  - Télécommunications numériques (MIMO, . . .)

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales
  - Équations de Painlevé et de Schrödinger
- Présence forte en physique également
  - Localisation d'Anderson par exemple !
- Quelques champs applicatifs
  - Échantillonnage compressant (Compressed Sensing)
  - Télécommunications numériques (MIMO, . . .)
  - Apprentissage

Aspects des matrices aléatoires de nos jours

- Quelques interactions
  - Probabilités et statistique
  - Algèbres d'opérateurs, combinatoire, topologie
  - Analyse et géométrie de grande dimension
  - Analyse classique et polynômes orthogonaux
  - Analyse complexe et problèmes de Riemann-Hilbert
  - Théorie des nombres et fonctions spéciales
  - Équations de Painlevé et de Schrödinger
- Présence forte en physique également
  - Localisation d'Anderson par exemple !
- Quelques champs applicatifs
  - Échantillonnage compressant (Compressed Sensing)
  - Télécommunications numériques (MIMO, . . .)
  - Apprentissage
  - Finance

Matrices de Wigner

Matrices gaussiennes du GUE

Matrices Hermitiennes gaussiennes $n \times n$ de densité

$$c_n \exp\left(-\frac{n}{2}\mathrm{Tr}(G^2)\right) dG$$

Matrices gaussiennes du GUE

Matrices Hermitiennes gaussiennes $n \times n$ de densité

$$c_n \exp\left(-\frac{n}{2}\mathrm{Tr}(G^2)\right) dG$$

- $\mathrm{Tr}(G^2) = \sum_i G_{ii}^2 + 2\sum_{i<j} |G_{ij}|^2$

Matrices gaussiennes du GUE

Matrices Hermitiennes gaussiennes $n \times n$ de densité

$$c_n \exp\left(-\frac{n}{2}\mathrm{Tr}(G^2)\right) dG$$

- $\mathrm{Tr}(G^2) = \sum_i G_{ii}^2 + 2\sum_{i<j} |G_{ij}|^2$
- $(G_{ij})_{i \leqslant j}$ indépendantes

Matrices gaussiennes du GUE

Matrices Hermitiennes gaussiennes $n \times n$ de densité

$$c_n \exp\left(-\frac{n}{2}\mathrm{Tr}(G^2)\right) dG$$

- $\mathrm{Tr}(G^2) = \sum_i G_{ii}^2 + 2\sum_{i<j} |G_{ij}|^2$
- $(G_{ij})_{i \leqslant j}$ indépendantes
- $G_{ii} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ et $G_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2n} I_2)$ si $i \neq j$

Matrices gaussiennes du GUE

Matrices Hermitiennes gaussiennes $n \times n$ de densité

$$c_n \exp\left(-\frac{n}{2}\mathrm{Tr}(G^2)\right) dG$$

- $\mathrm{Tr}(G^2) = \sum_i G_{ii}^2 + 2\sum_{i<j} |G_{ij}|^2$
- $(G_{ij})_{i \leqslant j}$ indépendantes
- $G_{ii} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ et $G_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2n} I_2)$ si $i \neq j$
- Invariance unitaire : $G \overset{d}{=} UGU^*$

Matrices gaussiennes du GUE

- Changement de variable

$$G = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^*$$

Matrices gaussiennes du GUE

- Changement de variable

$$G = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^*$$

- U et $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ indépendantes

Matrices gaussiennes du GUE

- Changement de variable

$$G = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^*$$

- U et $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ indépendantes
- Loi de U est uniforme sur groupe unitaire (Haar)

Matrices gaussiennes du GUE

- Changement de variable

$$G = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^*$$

- U et $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ indépendantes
- Loi de U est uniforme sur groupe unitaire (Haar)
- Loi de $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a pour densité

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto c_n \exp\left(-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right) \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2$$

Matrices gaussiennes du GUE

- Système de particules avec répulsion électrostatique

$$\exp\left(-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + 2\sum_{i<j}\log|\lambda_i-\lambda_j|\right)$$

Matrices gaussiennes du GUE

- Système de particules avec répulsion électrostatique

$$\exp\left(-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2+2\sum_{i<j}\log|\lambda_i-\lambda_j|\right)\approx\exp\left(-n^2\mathcal{E}(\mu_n)\right)$$

avec $\mu_n=\frac{1}{n}\sum_i\delta_{\lambda_i}$

Matrices gaussiennes du GUE

- Système de particules avec répulsion électrostatique

$$\exp\left(-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2+2\sum_{i<j}\log|\lambda_i-\lambda_j|\right)\approx\exp\left(-n^2\mathcal{E}(\mu_n)\right)$$

avec $\mu_n=\frac{1}{n}\sum_i\delta_{\lambda_i}$ et

$$\mathcal{E}(\mu)=\iint\left(\frac{x^2+y^2}{4}-\log|x-y|\right)d\mu(x)d\mu(y)$$

Matrices gaussiennes du GUE

- Système de particules avec répulsion électrostatique

$$\exp\left(-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + 2\sum_{i<j}\log|\lambda_i - \lambda_j|\right) \approx \exp\left(-n^2\mathcal{E}(\mu_n)\right)$$

avec $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_i \delta_{\lambda_i}$ et

$$\mathcal{E}(\mu) = \iint \left(\frac{x^2+y^2}{4} - \log|x-y|\right) d\mu(x)d\mu(y)$$

- Minimum pour $\mu = \mu_{sc} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)dx$

Théorème universel de Wigner

Matrice hermitienne $n \times n$ aléatoire (gaussienne ou pas)

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{H_{1n}} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} = U \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) U^*$$

Théorème universel de Wigner

Matrice hermitienne $n \times n$ aléatoire (gaussienne ou pas)

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{H_{1n}} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} = U \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) U^*$$

Distribution spectrale empirique de H

$$\mu_H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$$

Théorème universel de Wigner

Théorème universel de Wigner

Théorème (Universalité de Wigner)

Si les H_{ij} ont la même structure d'indépendance et de variance que le GUE alors pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$\mu_H(I) = \frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant n : \lambda_k \in I\}}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu_{sc}(I)$$

Théorème universel de Wigner

Théorème (Universalité de Wigner)

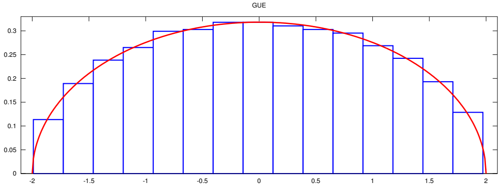
Si les H_{ij} ont la même structure d'indépendance et de variance que le GUE alors pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

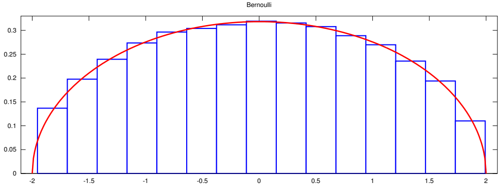
$$\mu_H(I) = \frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant n : \lambda_k \in I\}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_{sc}(I)$$

où μ_{sc} est la loi du semi-cercle de moyenne 0 et de variance 1

$$\mu_{sc} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} \mathbf{1}_{[-2,2]}(x)\, dx$$

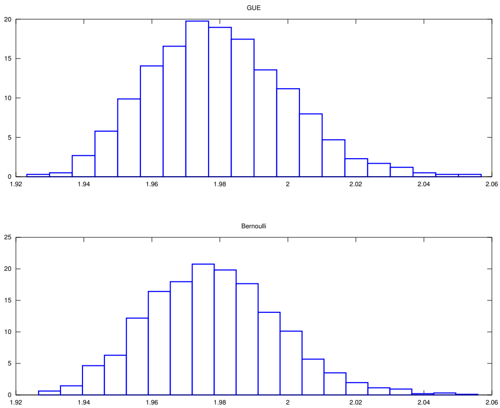
Universalité Bulk-Edge-Spacing





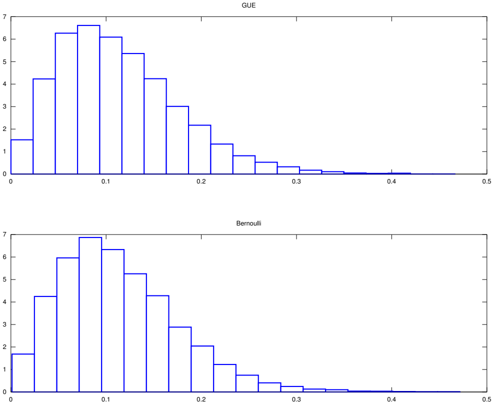
Bulk (Wigner)

Universalité Bulk-Edge-Spacing



Edge (Tracy-Widom)

Universalité Bulk-Edge-Spacing



Spacing (Mehta-Gaudin)

Mise en perspective en passant. . .

Universalité des modèles gaussiens

Mise en perspective en passant. . .

Universalité des modèles gaussiens

Premier ordre et second ordre

Mise en perspective en passant...

Universalité des modèles gaussiens

Premier ordre et second ordre

Global et local

Mise en perspective en passant. . .

Universalité des modèles gaussiens

Premier ordre et second ordre

Global et local

« Bulk, Edge, Spacing »

Mise en perspective en passant. . .

Universalité des modèles gaussiens

Premier ordre et second ordre

Global et local

« Bulk, Edge, Spacing »

Moments $\leqslant 2$ et moments $\leqslant 4$

Preuve combinatoire avec les moments

- Réduction à entrées de H centrées à moments contrôlés

Preuve combinatoire avec les moments

- Réduction à entrées de H centrées à moments contrôlés
- $\lim_{n\to\infty} \mu_H - \mathbb{E}\mu_H = 0$ (concentration de la mesure)

Preuve combinatoire avec les moments

- Réduction à entrées de H centrées à moments contrôlés
- $\lim_{n\to\infty} \mu_H - \mathbb{E}\mu_H = 0$ (concentration de la mesure)
- Moments et traces de puissances

$$\int x^m \, d\mu_H(x) = \frac{1}{n}(\lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m) = \mathrm{Tr}(H^m)$$

Preuve combinatoire avec les moments

- Réduction à entrées de H centrées à moments contrôlés
- $\lim_{n\to\infty} \mu_H - \mathbb{E}\mu_H = 0$ (concentration de la mesure)
- Moments et traces de puissances

$$\int x^m \, d\mu_H(x) = \frac{1}{n}(\lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m) = \mathrm{Tr}(H^m)$$

- Calcul des moments

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(H^m)) = \sum_{i_1,\ldots,i_m} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_m i_1})$$

Preuve combinatoire avec les moments

- Réduction à entrées de H centrées à moments contrôlés
- $\lim_{n\to\infty} \mu_H - \mathbb{E}\mu_H = 0$ (concentration de la mesure)
- Moments et traces de puissances

$$\int x^m \, d\mu_H(x) = \frac{1}{n}(\lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m) = \mathrm{Tr}(H^m)$$

- Calcul des moments

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(H^m)) = \sum_{i_1,\dots,i_m} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_m i_1})$$

- Indépendance, centrage, variance

Preuve combinatoire avec les moments

- Réduction à entrées de H centrées à moments contrôlés
- $\lim_{n\to\infty} \mu_H - \mathbb{E}\mu_H = 0$ (concentration de la mesure)
- Moments et traces de puissances

$$\int x^m \, d\mu_H(x) = \frac{1}{n}(\lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m) = \mathrm{Tr}(H^m)$$

- Calcul des moments

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(H^m)) = \sum_{i_1,\ldots,i_m} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_m i_1})$$

- Indépendance, centrage, variance
- Trois types de termes quand $n \to \infty$

Preuve combinatoire avec les moments

- Si m impair alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_m} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_m i_1}) = 0$$

Preuve combinatoire avec les moments

- Si m impair alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_m} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_m i_1}) = 0$$

- Si m pair alors on compte les partitions non-croisées

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_m} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_m i_1}) = \frac{1}{m/2+1}\binom{m}{m/2}$$

Preuve combinatoire avec les moments

- Si m impair alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\dots,i_m} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_m i_1}) = 0$$

- Si m pair alors on compte les partitions non-croisées

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\dots,i_m} \mathbb{E}(H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_m i_1}) = \frac{1}{m/2+1} \binom{m}{m/2}$$

- Pour tout entier $m \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int x^m \, d\mu_H(x) = \int x^m \, d\mu_{sc}(x)$$

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Remplacer $\{x \mapsto x^m : m \geqslant 1\}$ par $\{x \mapsto (z-x)^{-1} : z \in \mathbb{C}\}$

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Remplacer $\{x \mapsto x^m : m \geqslant 1\}$ par $\{x \mapsto (z-x)^{-1} : z \in \mathbb{C}\}$
- Transformée de Cauchy-Stieltjes d'une mesure ν sur $\mathbb{R}$

$$S_\nu(z) = \int \frac{1}{z-x}\, d\nu(x)$$

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Remplacer $\{x \mapsto x^m : m \geqslant 1\}$ par $\{x \mapsto (z-x)^{-1} : z \in \mathbb{C}\}$
- Transformée de Cauchy-Stieltjes d'une mesure ν sur $\mathbb{R}$

$$S_\nu(z) = \int \frac{1}{z-x} \, d\nu(x)$$

- Ici $z = a + ib$ avec $b > 0$

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Remplacer $\{x \mapsto x^m : m \geqslant 1\}$ par $\{x \mapsto (z-x)^{-1} : z \in \mathbb{C}\}$
- Transformée de Cauchy-Stieltjes d'une mesure ν sur $\mathbb{R}$

$$S_\nu(z) = \int \frac{1}{z-x}\, d\nu(x)$$

- Ici $z = a + ib$ avec $b > 0$
- Caractérisation de la mesure

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Remplacer $\{x \mapsto x^m : m \geqslant 1\}$ par $\{x \mapsto (z-x)^{-1} : z \in \mathbb{C}\}$
- Transformée de Cauchy-Stieltjes d'une mesure ν sur $\mathbb{R}$

$$S_\nu(z) = \int \frac{1}{z-x}\, d\nu(x)$$

- Ici $z = a + ib$ avec $b > 0$
- Caractérisation de la mesure
- Caractérisation de la convergence faible

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Pour $\mu_H = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k}$ on a

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}((H - zI)^{-1})$$

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Pour $\mu_H = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{\lambda_k}$ on a

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}((H - zI)^{-1})$$

- Trace normalisée de la résolvante de H en z

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Pour $\mu_H = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{\lambda_k}$ on a

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}((H - zI)^{-1})$$

- Trace normalisée de la résolvante de H en z
- Concentration : $S_{\mu_H} - \mathbb{E}S_{\mu_H} \to 0$ quand $n \to \infty$

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Pour $\mu_H = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k}$ on a

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}((H - zI)^{-1})$$

- Trace normalisée de la résolvante de H en z
- Concentration : $S_{\mu_H} - \mathbb{E}S_{\mu_H} \to 0$ quand $n \to \infty$
- Équation de point fixe par inversion par blocs:

$$\mathbb{E}S_{\mu_H} = -\frac{1}{z + \mathbb{E}S_{\mu_H}} + \varepsilon_n$$

Preuve analytique par Cauchy-Stieltjes

- Pour $\mu_H = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k}$ on a

$$S_{\mu_H}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}((H - zI)^{-1})$$

- Trace normalisée de la résolvante de H en z
- Concentration : $S_{\mu_H} - \mathbb{E}S_{\mu_H} \to 0$ quand $n \to \infty$
- Équation de point fixe par inversion par blocs:

$$\mathbb{E}S_{\mu_H} = -\frac{1}{z + \mathbb{E}S_{\mu_H}} + \varepsilon_n$$

- Unique solution admissible $S_{\mu_{sc}}$ quand $n \to \infty$

Probabilités libres de Voiculescu

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ algèbre, involution $M^* = \overline{M}^\top$ et trace $\tau(M) = \mathrm{Tr}(M)$

Probabilités libres de Voiculescu

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ algèbre, involution $M^* = \overline{M}^\top$ et trace $\tau(M) = \mathrm{Tr}(M)$
- $\mathcal{A}$ algèbre abstraite, involution * et trace τ

Probabilités libres de Voiculescu

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ algèbre, involution $M^* = \overline{M}^\top$ et trace $\tau(M) = \mathrm{Tr}(M)$
- $\mathcal{A}$ algèbre abstraite, involution * et trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments $(\tau(a^m))_{m\in\mathbb{N}}$

Probabilités libres de Voiculescu

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ algèbre, involution $M^* = \overline{M}^\top$ et trace $\tau(M) = \mathrm{Tr}(M)$
- $\mathcal{A}$ algèbre abstraite, involution * et trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments $(\tau(a^m))_{m\in\mathbb{N}}$
- $a \in \mathcal{A}$ est centré si $\tau(a) = 0$ et réel si $a = a^*$

Probabilités libres de Voiculescu

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ algèbre, involution $M^* = \overline{M}^\top$ et trace $\tau(M) = \mathrm{Tr}(M)$
- $\mathcal{A}$ algèbre abstraite, involution * et trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments $(\tau(a^m))_{m\in\mathbb{N}}$
- $a \in \mathcal{A}$ est centré si $\tau(a) = 0$ et réel si $a = a^*$
- $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ **libres** si pour tous $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \ldots, a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$

$$\tau((a_1-\tau(a_1))\cdots(a_k-\tau(a_k))) = 0 \quad \text{quand } i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$$

Probabilités libres de Voiculescu

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ algèbre, involution $M^* = \overline{M}^\top$ et trace $\tau(M) = \mathrm{Tr}(M)$
- $\mathcal{A}$ algèbre abstraite, involution * et trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments $(\tau(a^m))_{m\in\mathbb{N}}$
- $a \in \mathcal{A}$ est centré si $\tau(a) = 0$ et réel si $a = a^*$
- $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ **libres** si pour tous $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \ldots, a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$

  $$\tau((a_1 - \tau(a_1))\cdots(a_k - \tau(a_k))) = 0 \quad \text{quand } i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$$

- $a, b \in \mathcal{A}$ libres signifie sous-algèbres engendrées libres

Probabilités libres de Voiculescu

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ algèbre, involution $M^* = \overline{M}^\top$ et trace $\tau(M) = \mathrm{Tr}(M)$
- $\mathcal{A}$ algèbre abstraite, involution * et trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments $(\tau(a^m))_{m\in\mathbb{N}}$
- $a \in \mathcal{A}$ est centré si $\tau(a) = 0$ et réel si $a = a^*$
- $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ **libres** si pour tous $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \ldots, a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$

$$\tau((a_1 - \tau(a_1)) \cdots (a_k - \tau(a_k))) = 0 \quad \text{quand } i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$$

- $a, b \in \mathcal{A}$ libres signifie sous-algèbres engendrées libres
- Si $a, b \in \mathcal{A}$ libres alors $\mathrm{Loi}(a + b) = \mathrm{Loi}(a) \boxplus \mathrm{Loi}(b)$

Probabilités libres de Voiculescu

Théorème (Liberté asymptotique de Voiculescu)

Si

- U_n, U'_n, D_n, D'_n *indépendantes* $n \times n$
- U_n, U'_n *Haar unitaires*
- D_n *et* D'_n *diagonales avec* $\mu_{D_n} \to \mu$ *et* $\mu_{D'_n} \to \mu'$
- $H_n := U_n D_n U_n^*$ *et* $H'_n := U'_n D'_n U'^*_n$

alors $\mu_{H_n} \to \mu$ *et* $\mu_{H'_n} \to \mu'$ *et*

Probabilités libres de Voiculescu

Théorème (Liberté asymptotique de Voiculescu)

Si

- U_n, U'_n, D_n, D'_n *indépendantes* $n \times n$
- U_n, U'_n *Haar unitaires*
- D_n *et* D'_n *diagonales avec* $\mu_{D_n} \to \mu$ *et* $\mu_{D'_n} \to \mu'$
- $H_n := U_n D_n U_n^*$ *et* $H'_n := U'_n D'_n U'^*_n$

alors $\mu_{H_n} \to \mu$ *et* $\mu_{H'_n} \to \mu'$ *et*

$$\mu_{H_n + H'_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \boxplus \mu'.$$

Probabilités libres de Voiculescu

Théorème (Liberté asymptotique de Voiculescu)

Si

- U_n, U'_n, D_n, D'_n *indépendantes* $n \times n$
- U_n, U'_n *Haar unitaires*
- D_n *et* D'_n *diagonales avec* $\mu_{D_n} \to \mu$ *et* $\mu_{D'_n} \to \mu'$
- $H_n := U_n D_n U_n^*$ *et* $H'_n := U'_n D'_n U'^*_n$

alors $\mu_{H_n} \to \mu$ *et* $\mu_{H'_n} \to \mu'$ *et*

$$\mu_{H_n + H'_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu \boxplus \mu'.$$

$$\mu_{\mathrm{sc}} \boxplus \mu_{\mathrm{sc}} = \mathrm{dil}_{\sqrt{2}}(\mu_{\mathrm{sc}})$$

Matrices de Wishart

Matrices gaussiennes de Wishart

- $V_1, \ldots, V_n$ i.i.d. dans $\mathbb{R}^m$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$

Matrices gaussiennes de Wishart

- $V_1, \dots, V_n$ i.i.d. dans $\mathbb{R}^m$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$
- Matrice de covariance empirique = aléatoire $m \times m$

$$\Sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^\top = GG^\top \quad \text{avec} \quad G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} (V_j)_i$$

Matrices gaussiennes de Wishart

- $V_1, \ldots, V_n$ i.i.d. dans $\mathbb{R}^m$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$
- Matrice de covariance empirique = aléatoire $m \times m$

$$\Sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^\top = G G^\top \quad \text{avec} \quad G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} (V_j)_i$$

- Si $\Sigma = I$ alors $(G_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1/n)$

Matrices gaussiennes de Wishart

- $V_1, \dots, V_n$ i.i.d. dans $\mathbb{R}^m$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$
- Matrice de covariance empirique = aléatoire $m \times m$

$$\Sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^\top = GG^\top \quad \text{avec} \quad G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} (V_j)_i$$

- Si $\Sigma = I$ alors $(G_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1/n)$
- Loi de Σ_n = Loi de Wishart (χ^2 m-dimensionnel)

Matrices gaussiennes de Wishart

- $V_1, \ldots, V_n$ i.i.d. dans $\mathbb{R}^m$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$
- Matrice de covariance empirique = aléatoire $m \times m$

$$\Sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^\top = GG^\top \quad \text{avec} \quad G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} (V_j)_i$$

- Si $\Sigma = I$ alors $(G_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1/n)$
- Loi de Σ_n = Loi de Wishart (χ^2 m-dimensionnel)
- $\Sigma_n \to \Sigma$ quand $n \to \infty$ à m fixé (loi des grands nombres)

Matrices gaussiennes de Wishart

- $V_1, \ldots, V_n$ i.i.d. dans $\mathbb{R}^m$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$
- Matrice de covariance empirique = aléatoire $m \times m$

$$\Sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^\top = GG^\top \quad \text{avec} \quad G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} (V_j)_i$$

- Si $\Sigma = I$ alors $(G_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1/n)$
- Loi de Σ_n = Loi de Wishart (χ^2 m-dimensionnel)
- $\Sigma_n \to \Sigma$ quand $n \to \infty$ à m fixé (loi des grands nombres)
- Que se passe-t-il si $m \to \infty$ aussi ?

Théorème universel de Marchenko-Pastur

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{mn} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix}$$

Théorème universel de Marchenko-Pastur

Théorème (Universalité de Marchenko-Pastur)

Si les $m \times n$ entrées de X sont i.i.d. de variance $1/n$ et si $m/n \to \rho$ quand $m, n \to \infty$, alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}_+$,

$$\mu_{XX^\top}(I) = \frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant m : \lambda_k(XX^\top) \in I\}}{m} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} \mu_{\mathrm{mp}}(I)$$

Théorème universel de Marchenko-Pastur

Théorème (Universalité de Marchenko-Pastur)

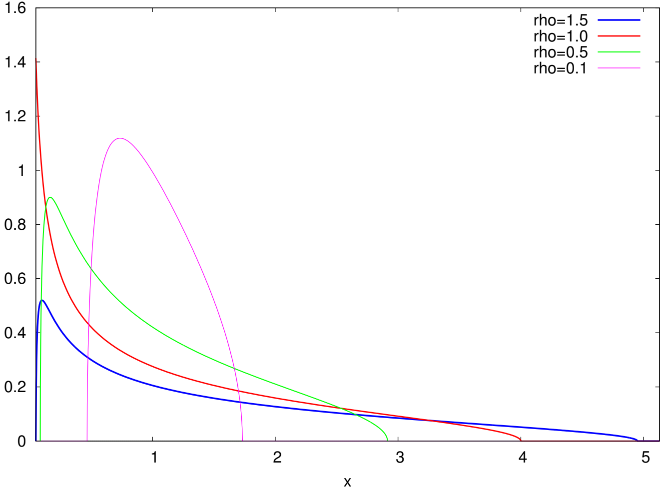
Si les $m \times n$ entrées de X sont i.i.d. de variance $1/n$ et si $m/n \to \rho$ quand $m, n \to \infty$, alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}_+$,

$$\mu_{XX^\top}(I) = \frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant m : \lambda_k(XX^\top) \in I\}}{m} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_{\mathrm{mp}}(I)$$

où, en posant $a = (1-\sqrt{\rho})^2$ et $b = (1+\sqrt{\rho})^2$,

$$\mu_{\mathrm{mp}} = \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)_+ \delta_0 + \frac{1}{\rho 2\pi x}\sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x)dx$$

Lois de Marchenko-Pastur



Théorème Universel de Marchenko-Pastur

- Preuve par méthode des moments
- Preuve par transformée de Cauchy-Stieltjes
- Similaire au théorème de Wigner (plus lourd)
- Modèle gaussien explicite (Laguerre au lieu de Hermite)

Invertibilité

Invertibilité des matrices aléatoires

- Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$s_{\min}(M) = \min_{\|v\|=1} \|Mv\| \quad \text{et} \quad s_{\max}(M) = \max_{\|v\|=1} \|Mv\|$$

Invertibilité des matrices aléatoires

- Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$s_{\min}(M) = \min_{\|v\|=1} \|Mv\| \quad \text{et} \quad s_{\max}(M) = \max_{\|v\|=1} \|Mv\|$$

- Si M_{ij} i.i.d. avec $\mathbb{E}(M_{11}) = 0$, $\mathbb{E}(|M_{11}|^2) = 1$, $\mathbb{E}(|M_{11}|^4) < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{\min}(M)}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_{\max}(M)}{\sqrt{n}} = 2$$

Invertibilité des matrices aléatoires

- Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$s_{\min}(M) = \min_{\|v\|=1} \|Mv\| \quad \text{et} \quad s_{\max}(M) = \max_{\|v\|=1} \|Mv\|$$

- Si M_{ij} i.i.d. avec $\mathbb{E}(M_{11}) = 0$, $\mathbb{E}(|M_{11}|^2) = 1$, $\mathbb{E}(|M_{11}|^4) < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{\min}(M)}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_{\max}(M)}{\sqrt{n}} = 2$$

- Non-linéarité polynomiale

$$s_{\min}(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ singulière}$$

Invertibilité des matrices aléatoires

- Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$s_{\min}(M) = \min_{\|v\|=1} \|Mv\| \quad \text{et} \quad s_{\max}(M) = \max_{\|v\|=1} \|Mv\|$$

- Si M_{ij} i.i.d. avec $\mathbb{E}(M_{11}) = 0$, $\mathbb{E}(|M_{11}|^2) = 1$, $\mathbb{E}(|M_{11}|^4) < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{\min}(M)}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_{\max}(M)}{\sqrt{n}} = 2$$

- Non-linéarité polynomiale

$$s_{\min}(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ singulière}$$

- Invertibilité et distances entre lignes

$$s_{\min}(M) \approx \min_i \operatorname{dist}(L_i, L_{-i})$$

Invertibilité des matrices aléatoires

- *Smoothed analysis: motivation and discrete models*, Algorithms and data structures, Lecture Notes in Computer Science, 2003

Invertibilité des matrices aléatoires

- *Smoothed analysis: motivation and discrete models*, Algorithms and data structures, Lecture Notes in Computer Science, 2003
- *Smoothed analysis of algorithms*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2002

Invertibilité des matrices aléatoires

- *Smoothed analysis: motivation and discrete models*, Algorithms and data structures, Lecture Notes in Computer Science, 2003
- *Smoothed analysis of algorithms*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2002
- Conjecture (Spielman-Teng) : si M_{ij} i.i.d. alors il existe $C > 0$ et $0 < c < 1$ tq pour tout $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(s_{\min}(M) \leqslant t\sqrt{n}) \leqslant Ct + c^n$$

Invertibilité des matrices aléatoires

- *Smoothed analysis: motivation and discrete models*, Algorithms and data structures, Lecture Notes in Computer Science, 2003
- *Smoothed analysis of algorithms*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2002
- Conjecture (Spielman-Teng) : si M_{ij} i.i.d. alors il existe $C > 0$ et $0 < c < 1$ tq pour tout $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(s_{\min}(M) \leqslant t\sqrt{n}) \leqslant Ct + c^n$$

- Résolue par Rudelson et Vershynin et par Tao et Vu

Une conjecture toujours ouverte

- Conjecture: si les M_{ij} sont i.i.d. Bernoulli symétriques ± 1,

$$\mathbb{P}(M \text{ singulière}) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^n.$$

Une conjecture toujours ouverte

- Conjecture: si les M_{ij} sont i.i.d. Bernoulli symétriques ± 1,

$$\mathbb{P}(M \text{ singulière}) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^n.$$

- Prendre $t = 0$ dans Spielman et Teng ($\leqslant C \times 0 + c^n$)

Une conjecture toujours ouverte

- Conjecture: si les M_{ij} sont i.i.d. Bernoulli symétriques ± 1,

$$\mathbb{P}(M \text{ singulière}) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^n.$$

- Prendre $t = 0$ dans Spielman et Teng ($\leqslant C \times 0 + c^n$)
- Presque sûrement M inversible si $n \gg 1$ (Borel-Cantelli)

Une conjecture toujours ouverte

- Conjecture: si les M_{ij} sont i.i.d. Bernoulli symétriques ± 1,

$$\mathbb{P}(M \text{ singulière}) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^n.$$

- Prendre $t = 0$ dans Spielman et Teng ($\leqslant C \times 0 + c^n$)
- Presque sûrement M inversible si $n \gg 1$ (Borel-Cantelli)
- Facteur $1/2$ suggéré par proba d'égalité de 2 lignes

Une conjecture toujours ouverte

- Conjecture: si les M_{ij} sont i.i.d. Bernoulli symétriques ± 1,

$$\mathbb{P}(M \text{ singulière}) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^n.$$

- Prendre $t = 0$ dans Spielman et Teng ($\leqslant C \times 0 + c^n$)
- Presque sûrement M inversible si $n \gg 1$ (Borel-Cantelli)
- Facteur $1/2$ suggéré par proba d'égalité de 2 lignes
- Depuis 60 ans : Erdős, Komlós, Kahn, Szemerédi, ...

Une conjecture toujours ouverte

- Conjecture: si les M_{ij} sont i.i.d. Bernoulli symétriques ± 1,

$$\mathbb{P}(M \text{ singulière}) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^n.$$

- Prendre $t = 0$ dans Spielman et Teng ($\leqslant C \times 0 + c^n$)
- Presque sûrement M inversible si $n \gg 1$ (Borel-Cantelli)
- Facteur $1/2$ suggéré par proba d'égalité de 2 lignes
- Depuis 60 ans : Erdős, Komlós, Kahn, Szemerédi, ...
- Meilleur résultat actuel (Bourgain-Vu-Wood) :

$$\mathbb{P}(M \text{ singulière}) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon_n\right)^n.$$

Merci pour votre attention !