Autour du théorème central limite

Djalil Chafaï

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

« Séminaire de Marne »
Mardi 6 décembre 2011

Plan de l’exposé

Plan de l’exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l’exposé

Ludwig Boltzmann

1844 – 1906

Boltzmann summarized most (but not all) of his work in a two volume treatise Vorlesungen uber Gastheorie. This is one of the greatest books in the history of exact sciences and the reader is strongly advised to consult it. Mark Kac (1959).

Ludwig Boltzmann

1844 – 1906

Boltzmann summarized most (but not all) of his work in a two volume treatise Vorlesungen uber Gastheorie. This is one of the greatest books in the history of exact sciences and the reader is strongly advised to consult it. Mark Kac (1959).

- Lisez plutôt *H-Theorem and beyond: Boltzmann's entropy in today's mathematics*, par Cédric Villani (2008).

L'entropie selon Boltzmann

- Système de $n = n_1 + \cdots + n_r$ particules (r micro états)

L'entropie selon Boltzmann

- Système de $n = n_1 + \cdots + n_r$ particules (r micro états)
- Degrés de liberté du système :

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r}$$

L'entropie selon Boltzmann

- Système de $n = n_1 + \cdots + n_r$ particules (r micro états)
- Degrés de liberté du système :

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r}$$

- Mesure additive du degré de liberté par particule :

$$\frac{1}{n} \log \binom{n}{n_1, \ldots, n_r}$$

L'entropie selon Boltzmann

- Système de $n = n_1 + \cdots + n_r$ particules (r micro états)
- Degrés de liberté du système :

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r}$$

- Mesure additive du degré de liberté par particule :

$$\frac{1}{n} \log \binom{n}{n_1, \ldots, n_r}$$

- Si $n_i/n \to p_i$ quand $n \to \infty$ on obtient l'entropie discrète :

$$\mathcal{E}(p) = -\sum_{i=1}^{r} p_i \log(p_i)$$

L'entropie selon Boltzmann

- Système de $n = n_1 + \cdots + n_r$ particules (r micro états)
- Degrés de liberté du système :

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r}$$

- Mesure additive du degré de liberté par particule :

$$\frac{1}{n} \log \binom{n}{n_1, \ldots, n_r}$$

- Si $n_i/n \to p_i$ quand $n \to \infty$ on obtient l'entropie discrète :

$$\mathcal{E}(p) = -\sum_{i=1}^{r} p_i \log(p_i)$$

- Entropie continue : $\mathcal{E}(f) = -\int f(t) \log f(t)\, dt = -H(f)$

Maximum d'entropie

- Déterminer $\arg\max \mathcal{H}$ sur une famille de lois

Maximum d'entropie

- Déterminer $\arg\max \mathcal{H}$ sur une famille de lois
- Entropie discrète maximisée par loi uniforme

$$p_1 = \cdots = p_r = \frac{1}{r}$$

Maximum d'entropie

- Déterminer $\arg\max \mathcal{H}$ sur une famille de lois
- Entropie discrète maximisée par loi uniforme

$$p_1 = \cdots = p_r = \frac{1}{r}$$

- Lois sur $\mathbb{R}$ à second moment fixé $\Rightarrow$ loi gaussienne

Maximum d'entropie

- Déterminer $\arg\max \mathcal{H}$ sur une famille de lois
- Entropie discrète maximisée par loi uniforme

$$p_1 = \cdots = p_r = \frac{1}{r}$$

- Lois sur $\mathbb{R}$ à second moment fixé $\Rightarrow$ loi gaussienne
- Lois sur $\mathbb{R}$ à support fixé $\Rightarrow$ loi uniforme

Maximum d'entropie

- Déterminer $\arg\max \mathcal{H}$ sur une famille de lois
- Entropie discrète maximisée par loi uniforme

$$p_1 = \cdots = p_r = \frac{1}{r}$$

- Lois sur $\mathbb{R}$ à second moment fixé $\Rightarrow$ loi gaussienne
- Lois sur $\mathbb{R}$ à support fixé $\Rightarrow$ loi uniforme
- Si μ a pour densité e^{-V} alors elle réalise le maximum de $\mathcal{E}$ parmi les lois sur $\mathbb{R}$ de même V-moment

Boltzmann et son théorème H (1870$\pm$)

- Gaz de particules isolé (Newton baisse les bras !)

Boltzmann et son théorème H (1870$\pm$)

- Gaz de particules isolé (Newton baisse les bras !)
- Approche « statistique » : densité positions-vitesse $f_t(x, v)$

Boltzmann et son théorème H (1870±)

- Gaz de particules isolé (Newton baisse les bras !)
- Approche « statistique » : densité positions-vitesse $f_t(x, v)$
- Équation d'évolution de Boltzmann (et Maxwell)

$$\partial_t f_t(x, v) = v \partial_x f_t(x, v) + Q(f_t, f_t)(x, v)$$

Boltzmann et son théorème H (1870$\pm$)

- Gaz de particules isolé (Newton baisse les bras !)
- Approche « statistique » : densité positions-vitesse $f_t(x, v)$
- Équation d'évolution de Boltzmann (et Maxwell)

$$\partial_t f_t(x, v) = v\partial_x f_t(x, v) + Q(f_t, f_t)(x, v)$$

- Loi de conservation $\partial_t \iint v^2 \, f_t(x, v) \, dxdv = 0$

Boltzmann et son théorème H (1870$\pm$)

- Gaz de particules isolé (Newton baisse les bras !)
- Approche « statistique » : densité positions-vitesse $f_t(x, v)$
- Équation d'évolution de Boltzmann (et Maxwell)

$$\partial_t f_t(x, v) = v \partial_x f_t(x, v) + Q(f_t, f_t)(x, v)$$

- Loi de conservation $\partial_t \iint v^2 \, f_t(x, v) \, dxdv = 0$
- Théorème H : l'entropie $\mathcal{E}$ est croissante ($H = -\mathcal{E}$) :

$$\partial_t \mathcal{E}(f_t) \geqslant 0$$

Boltzmann et son théorème H (1870±)

- Gaz de particules isolé (Newton baisse les bras !)
- Approche « statistique » : densité positions-vitesse $f_t(x, v)$
- Équation d'évolution de Boltzmann (et Maxwell)

$$\partial_t f_t(x, v) = v\partial_x f_t(x, v) + Q(f_t, f_t)(x, v)$$

- Loi de conservation $\partial_t \iint v^2\, f_t(x, v)\, dxdv = 0$
- Théorème H : l'entropie $\mathcal{E}$ est croissante ($H = -\mathcal{E}$) :

$$\partial_t \mathcal{E}(f_t) \geqslant 0$$

- Équilibre gaussien en vitesse ($\arg\max \mathcal{E}$ à variance fixée)

Boltzmann et son théorème H (1870±)

- Gaz de particules isolé (Newton baisse les bras !)
- Approche « statistique » : densité positions-vitesse $f_t(x,v)$
- Équation d'évolution de Boltzmann (et Maxwell)

$$\partial_t f_t(x,v) = v\partial_x f_t(x,v) + Q(f_t,f_t)(x,v)$$

- Loi de conservation $\partial_t \iint v^2\, f_t(x,v)\, dxdv = 0$
- Théorème H : l'entropie $\mathcal{E}$ est croissante ($H = -\mathcal{E}$) :

$$\partial_t \mathcal{E}(f_t) \geqslant 0$$

- Équilibre gaussien en vitesse ($\arg\max \mathcal{E}$ à variance fixée)
- Plus : ..., Kac, Cercignani, Villani, Saint-Raymond, ...

TCL classique des probabilités et entropie

Théorème central limite classique

Théorème (TCL classique)

- *Suite de variables aléatoires i.i.d.* $X_1, X_2, \ldots$

Théorème central limite classique

Théorème (TCL classique)

- *Suite de variables aléatoires i.i.d.* $X_1, X_2, \dots$
- *Centrées réduites :* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *et* $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$

Théorème central limite classique

Théorème (TCL classique)

- *Suite de variables aléatoires i.i.d.* $X_1, X_2, \ldots$
- *Centrées réduites :* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *et* $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$
- *Alors*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Théorème central limite classique

Théorème (TCL classique)

- *Suite de variables aléatoires i.i.d.* $X_1, X_2, \ldots$
- *Centrées réduites :* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *et* $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$
- *Alors*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Loi de conservation : $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = 1$, $\forall n$

Théorème central limite classique

Théorème (TCL classique)

- *Suite de variables aléatoires i.i.d.* $X_1, X_2, \ldots$
- *Centrées réduites :* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *et* $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$
- *Alors*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Loi de conservation : $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = 1$, $\forall n$
- Conjecture de Shannon (1940) : $n \mapsto \mathcal{E}(S_n)$ croit

Théorème central limite classique

Théorème (TCL classique)

- *Suite de variables aléatoires i.i.d.* $X_1, X_2, \ldots$
- *Centrées réduites :* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *et* $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$
- *Alors*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Loi de conservation : $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = 1$, $\forall n$
- Conjecture de Shannon (1940) : $n \mapsto \mathcal{E}(S_n)$ croit
  - Naturel car $\arg\max \mathcal{E}$ gaussien à second moment fixé

Théorème central limite classique

Théorème (TCL classique)

- *Suite de variables aléatoires i.i.d.* $X_1, X_2, \ldots$
- *Centrées réduites :* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *et* $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$
- *Alors*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Loi de conservation : $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = 1$, $\forall n$
- Conjecture de Shannon (1940) : $n \mapsto \mathcal{E}(S_n)$ croit
  - Naturel car $\arg\max \mathcal{E}$ gaussien à second moment fixé
  - Preuve (2004) : Artstein-Ball-Barthe-Naor

Éléments de preuve

- Information de Fisher de X de densité f:

$$F(X) := \int \frac{f'^2}{f}\, dx$$

Éléments de preuve

- Information de Fisher de X de densité f:

$$F(X) := \int \frac{f'^2}{f}\,dx$$

- Formule de de Bruijn (G gaussienne standard) :

$$\mathcal{E}(G) - \mathcal{E}(X) = \int_0^\infty \left(F(\sqrt{e^{-2t}}X + \sqrt{1 - e^{-2t}}G) - 1 \right) dt.$$

Éléments de preuve

- Information de Fisher de X de densité f:

$$F(X) := \int \frac{f'^2}{f}\, dx$$

- Formule de de Bruijn (G gaussienne standard) :

$$\mathcal{E}(G) - \mathcal{E}(X) = \int_0^\infty \left(F(\sqrt{e^{-2t}}X + \sqrt{1 - e^{-2t}}G) - 1\right) dt.$$

- Décroissance de l'information de Fisher :

$$n \mapsto F(S_n) \quad \text{décroit.}$$

Éléments de preuve

- Information de Fisher de X de densité f:

$$F(X) := \int \frac{f'^2}{f}\, dx$$

- Formule de de Bruijn (G gaussienne standard) :

$$\mathcal{E}(G) - \mathcal{E}(X) = \int_0^\infty \left(F(\sqrt{e^{-2t}}X + \sqrt{1 - e^{-2t}}G) - 1 \right) dt.$$

- Décroissance de l'information de Fisher :

$$n \mapsto F(S_n) \quad \text{décroit.}$$

- Concavité de l'entropie le long d'un semi-groupe

TCL des probabilités libres

Probabilités libres (1990$\pm$)

- $\star$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une trace τ

Probabilités libres (1990$\pm$)

- $\star$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments mixtes de a et a^*:

$$\tau(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_m}), \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, *\}, \quad m \geqslant 1$$

Probabilités libres (1990±)

- $\star$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments mixtes de a et a^*:

$$\tau(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_m}), \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, *\}, \quad m \geqslant 1$$

- Famille de sous-algèbres $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est **libre** quand $(a_j \in \mathcal{A}_{i_j})$

$$\tau((a_1 - \tau(a_1)) \cdots (a_n - \tau(a_n))) = 0 \quad \text{si} \quad i_1 \neq \cdots \neq i_n$$

Probabilités libres (1990±)

- $\star$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments mixtes de a et a^*:

$$\tau(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_m}), \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, *\}, \quad m \geqslant 1$$

- Famille de sous-algèbres $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est **libre** quand $(a_j \in \mathcal{A}_{i_j})$

$$\tau((a_1 - \tau(a_1)) \cdots (a_n - \tau(a_n))) = 0 \quad \text{si} \quad i_1 \neq \cdots \neq i_n$$

- On dit que $a, b \in \mathcal{A}$ libres si leurs algèbres le sont

Probabilités libres (1990±)

- $\star$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments mixtes de a et a^*:

$$\tau(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_m}), \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, *\}, \quad m \geqslant 1$$

- Famille de sous-algèbres $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est **libre** quand $(a_j \in \mathcal{A}_{i_j})$

$$\tau((a_1 - \tau(a_1)) \cdots (a_n - \tau(a_n))) = 0 \quad \text{si} \quad i_1 \neq \cdots \neq i_n$$

- On dit que $a, b \in \mathcal{A}$ libres si leurs algèbres le sont
- Si $a, b \in \mathcal{A}$ libres alors $\mathrm{Loi}(a + b) = \mathrm{Loi}(a) \boxplus \mathrm{Loi}(b)$

Probabilités libres (1990±)

- $\star$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une trace τ
- Si $a \in \mathcal{A}$ alors $\mathrm{Loi}(a)$ = moments mixtes de a et a^*:

$$\tau(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_m}), \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, *\}, \quad m \geqslant 1$$

- Famille de sous-algèbres $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est **libre** quand $(a_j \in \mathcal{A}_{i_j})$

$$\tau((a_1 - \tau(a_1)) \cdots (a_n - \tau(a_n))) = 0 \quad \text{si} \quad i_1 \neq \cdots \neq i_n$$

- On dit que $a, b \in \mathcal{A}$ libres si leurs algèbres le sont
- Si $a, b \in \mathcal{A}$ libres alors $\mathrm{Loi}(a+b) = \mathrm{Loi}(a) \boxplus \mathrm{Loi}(b)$
- Dictionnaire non-commutatif des probabilités libres :

(variable,trace,liberté) $\equiv$ (v.a., espérance, indépendance)

TLC des probabilités libres

Théorème (Voiculescu)

- *Suite* $a_1, a_2, \ldots$ *dans* $\mathcal{A}$*, libres et de même loi*

TLC des probabilités libres

Théorème (Voiculescu)

- *Suite* $a_1, a_2, \ldots$ *dans* $\mathcal{A}$*, libres et de même loi*
- *Variables réelles:* $a_i = a_i^*$ *pour tout* $i \geqslant 1$

TLC des probabilités libres

Théorème (Voiculescu)

- *Suite* $a_1, a_2, \ldots$ *dans* $\mathcal{A}$*, libres et de même loi*
- *Variables réelles:* $a_i = a_i^*$ *pour tout* $i \geqslant 1$
- *Centrées réduites :* $\tau(a_i) = 0$ *et* $\tau(a_i^2) = 1$

TLC des probabilités libres

Théorème (Voiculescu et la loi du demi-cercle de Wigner)

- *Suite* $a_1, a_2, \ldots$ *dans* $\mathcal{A}$*, libres et de même loi*
- *Variables réelles:* $a_i = a_i^*$ *pour tout* $i \geqslant 1$
- *Centrées réduites :* $\tau(a_i) = 0$ *et* $\tau(a_i^2) = 1$
- *Alors*

$$s_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{[-2,2]}dx$$

TLC des probabilités libres

Théorème (Voiculescu et la loi du demi-cercle de Wigner)

- *Suite $a_1, a_2, \dots$ dans $\mathcal{A}$, libres et de même loi*
- *Variables réelles: $a_i = a_i^*$ pour tout $i \geqslant 1$*
- *Centrées réduites : $\tau(a_i) = 0$ et $\tau(a_i^2) = 1$*
- *Alors*

$$s_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{[-2,2]}dx$$

- Loi de conservation : $\tau(s_n) = 0$ et $\tau(s_n^2) = 1 \; \forall n$

TLC des probabilités libres

Théorème (Voiculescu et la loi du demi-cercle de Wigner)

- *Suite $a_1, a_2, \ldots$ dans $\mathcal{A}$, libres et de même loi*
- *Variables réelles: $a_i = a_i^*$ pour tout $i \geqslant 1$*
- *Centrées réduites : $\tau(a_i) = 0$ et $\tau(a_i^2) = 1$*
- *Alors*

$$s_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{[-2,2]}dx$$

- Loi de conservation : $\tau(s_n) = 0$ et $\tau(s_n^2) = 1 \ \forall n$
- Dictionnaire non-commutatif des probabilités libres :
  (loi du demi cercle de Wigner) $\equiv$ (loi gaussienne standard)

Monotonie de l'entropie de Voiculescu

- La distribution de a est la loi μ_a sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int x^m \, d\mu_a = \tau(a^m), \quad m \geqslant 1$$

Monotonie de l'entropie de Voiculescu

- La distribution de a est la loi μ_a sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int x^m \, d\mu_a = \tau(a^m), \quad m \geqslant 1$$

- Entropie de Voiculescu d'une loi μ sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{E}(\mu) = \iint \log|x-y| \, d\mu(x) d\mu(y).$$

Monotonie de l'entropie de Voiculescu

- La distribution de a est la loi μ_a sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int x^m \, d\mu_a = \tau(a^m), \quad m \geqslant 1$$

- Entropie de Voiculescu d'une loi μ sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{E}(\mu) = \iint \log|x-y| \, d\mu(x) d\mu(y).$$

- $\arg\max \mathcal{E}$ à second moment fixé = loi du demi cercle !

Monotonie de l'entropie de Voiculescu

- La distribution de a est la loi μ_a sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int x^m \, d\mu_a = \tau(a^m), \quad m \geqslant 1$$

- Entropie de Voiculescu d'une loi μ sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{E}(\mu) = \iint \log |x - y| \, d\mu(x) d\mu(y).$$

- $\arg\max \mathcal{E}$ à second moment fixé = loi du demi cercle !
- Shlyakhtenko : $\mathcal{E}$ est monotone le long du TCL libre !

TCL et corps convexes

Corps convexes et loi gaussienne

- **Cube** : si $X \sim \mathrm{Uniforme}(B^n_\infty(\sqrt{3}))$ alors TCL !

$$X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.}, \quad \mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathrm{Cov}(X) = I_n$$

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Corps convexes et loi gaussienne

- **Cube** : si $X \sim \mathrm{Uniforme}(B^n_\infty(\sqrt{3}))$ alors TCL !

$$X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.}, \quad \mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathrm{Cov}(X) = I_n$$
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- **Sphère** : si $X \sim \mathrm{Uniforme}(S^n_2(\sqrt{n}))$ alors

$$\langle X, \theta \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Mais par le principe d'Archimède :

$$(X_1, \ldots, X_{n-2}) \sim \mathrm{Uniforme}(B^{n-2}_2(\sqrt{n}))$$

Corps convexes et loi gaussienne

- **Cube** : si $X \sim \mathrm{Uniforme}(B_\infty^n(\sqrt{3}))$ alors TCL !

$$X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.}, \quad \mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathrm{Cov}(X) = I_n$$

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- **Sphère** : si $X \sim \mathrm{Uniforme}(S_2^n(\sqrt{n}))$ alors

$$\langle X, \theta \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Mais par le principe d'Archimède :

$$(X_1, \ldots, X_{n-2}) \sim \mathrm{Uniforme}(B_2^{n-2}(\sqrt{n}))$$

- **Boule** : si $X \sim \mathrm{Uniforme}(B_2^n(\sqrt{n+2}))$ alors

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathrm{Cov}(X) = I_n, \quad \langle X, \theta \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

TCL pour corps convexes (2009) $\pm$)

Théorème (Klartag et $\approx$ Fleury-Guédon-Paouris)

- *Loi uniforme sur un corps convexe* $\Rightarrow$ *densité* log-*concave*

TCL pour corps convexes (2009) $\pm$)

Théorème (Klartag et $\approx$ Fleury-Guédon-Paouris)

- *Loi uniforme sur un corps convexe* $\Rightarrow$ *densité* log-*concave*
- *Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ à densité f* log-*concave*

TCL pour corps convexes (2009) $\pm$)

Théorème (Klartag et $\approx$ Fleury-Guédon-Paouris)

- *Loi uniforme sur un corps convexe* $\Rightarrow$ *densité* log-*concave*
- *Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ à densité f* log-*concave*
- *Inconditionnel et isotrope :* $f(x) = f(\varepsilon \cdot x)$ *et* $\mathrm{Cov}(X) = I_n$

TCL pour corps convexes (2009) $\pm$)

Théorème (Klartag et $\approx$ Fleury-Guédon-Paouris)

- *Loi uniforme sur un corps convexe* $\Rightarrow$ *densité* log-*concave*
- *Soit X un vecteur aléatoire de* $\mathbb{R}^n$ *à densité f* log-*concave*
- *Inconditionnel et isotrope :* $f(x) = f(\varepsilon \cdot x)$ *et* $\mathrm{Cov}(X) = I_n$
- *Alors*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

TCL pour corps convexes (2009) $\pm$)

Théorème (Klartag et $\approx$ Fleury-Guédon-Paouris)

- *Loi uniforme sur un corps convexe* $\Rightarrow$ *densité* log*-concave*
- *Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ à densité f* log*-concave*
- *Inconditionnel et isotrope :* $f(x) = f(\varepsilon \cdot x)$ *et* $\mathrm{Cov}(X) = I_n$
- *Alors*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Dependance faible géométrique entre composantes de X

TCL pour corps convexes (2009) $\pm$)

Théorème (Klartag et $\approx$ Fleury-Guédon-Paouris)

- *Loi uniforme sur un corps convexe* $\Rightarrow$ *densité* log-*concave*
- *Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ à densité f* log-*concave*
- *Inconditionnel et isotrope :* $f(x) = f(\varepsilon \cdot x)$ *et* $\mathrm{Cov}(X) = I_n$
- *Alors*

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Dependance faible géométrique entre composantes de X
- À lire : *Théorème de la limite centrale pour les corps convexes* par Barthe (Séminaire Bourbaki, 2009)

TCL pour corps convexes (2007 $\pm$)

Théorème (Barani et Vu)

- $X_1, X_2, \ldots$ *i.i.d. centrés réduits gaussiens sur* $\mathbb{R}^{d \geqslant 2}$

TCL pour corps convexes (2007 $\pm$)

Théorème (Barani et Vu)

- *$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. centrés réduits gaussiens sur* $\mathbb{R}^{d \geqslant 2}$
- *Polytope gaussien* $P_n = \mathrm{EnveloppeConvexe}(X_1, \ldots, X_n)$

TCL pour corps convexes (2007 $\pm$)

Théorème (Barani et Vu)

- $X_1, X_2, \ldots$ *i.i.d. centrés réduits gaussiens sur* $\mathbb{R}^{d \geqslant 2}$
- *Polytope gaussien* $P_n = \mathrm{EnveloppeConvexe}(X_1, \ldots, X_n)$
- *Volume dans* $\mathbb{R}^d$ *du polytope :* $V_n = \mathrm{Volume}(P_n)$

TCL pour corps convexes (2007 $\pm$)

Théorème (Barani et Vu)

- $X_1, X_2, \ldots$ *i.i.d. centrés réduits gaussiens sur* $\mathbb{R}^{d \geqslant 2}$
- *Polytope gaussien* $P_n = \mathrm{EnveloppeConvexe}(X_1, \ldots, X_n)$
- *Volume dans* $\mathbb{R}^d$ *du polytope :* $V_n = \mathrm{Volume}(P_n)$
- *Alors*

$$\frac{\mathrm{V_n} - \mathbb{E}(V_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(V_n)}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

TCL pour corps convexes (2007 $\pm$)

Théorème (Barani et Vu)

- *$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. centrés réduits gaussiens sur* $\mathbb{R}^{d \geqslant 2}$
- *Polytope gaussien* $P_n = \mathrm{EnveloppeConvexe}(X_1, \ldots, X_n)$
- *Volume dans* $\mathbb{R}^d$ *du polytope :* $V_n = \mathrm{Volume}(P_n)$
- *Alors*

$$\frac{\mathrm{V_n} - \mathbb{E}(V_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(V_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- $\mathbb{E}(V_n) \sim c(\log(n))^{d/2}$ et $\mathrm{Var}(P_n) \sim c' \log(n)^{(d-3)/2}$

TCL pour corps convexes (2007 $\pm$)

Théorème (Barani et Vu)

- *$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. centrés réduits gaussiens sur* $\mathbb{R}^{d \geqslant 2}$
- *Polytope gaussien* $P_n = \mathrm{EnveloppeConvexe}(X_1, \ldots, X_n)$
- *Volume dans* $\mathbb{R}^d$ *du polytope :* $V_n = \mathrm{Volume}(P_n)$
- *Alors*

$$\frac{\mathrm{V_n} - \mathbb{E}(V_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(V_n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- $\mathbb{E}(V_n) \sim c(\log(n))^{d/2}$ et $\mathrm{Var}(P_n) \sim c' \log(n)^{(d-3)/2}$
- Universalité : probable mais incomplètement élucidée

TCL sur le groupe d'Heisenberg

Groupe d'Heisenberg

- $\mathbb{R}^3$ muni de la structure de groupe non commutatif

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y))$$

$$(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, -z)$$

Groupe d'Heisenberg

- $\mathbb{R}^3$ muni de la structure de groupe non commutatif

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y))$$

$$(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, -z)$$

- Code position et aire algébrique à la corde d'un chemin

$$[(0,0),(x,y)] \cup [(x,y),(x+x',y+y')] \quad \text{et} \quad [(0,0),(x+x',y+y')]$$

Groupe d'Heisenberg

- $\mathbb{R}^3$ muni de la structure de groupe non commutatif

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y))$$

$$(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, -z)$$

- Code position et aire algébrique à la corde d'un chemin

$$[(0,0),(x,y)] \cup [(x,y),(x+x',y+y')] \quad \text{et} \quad [(0,0),(x+x',y+y')]$$

- Operateurs de dilatations : $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathrm{dil}_t(x, y, z) = (tx, ty, t^2 z)$$

Un TCL sur le groupe d'Heisenberg

Théorème

- $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ *incréments marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}^2$

Un TCL sur le groupe d'Heisenberg

Théorème

- $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ *incréments marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}^2$
- $(X_1, Y_1) * \cdots * (X_n, Y_n) = (X_1 + \cdots + X_n, Y_1 + \cdots + Y_n, A_n)$

Un TCL sur le groupe d'Heisenberg

Théorème

- $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ *incréments marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}^2$
- $(X_1, Y_1) * \cdots * (X_n, Y_n) = (X_1 + \cdots + X_n, Y_1 + \cdots + Y_n, A_n)$
- *Alors*

$$S_n = \mathrm{dil}_{n^{-1/2}}((X_1, Y_1) * \cdots * (X_n, Y_n)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} (B_1, A_1)$$

Un TCL sur le groupe d'Heisenberg

Théorème

- $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ *incréments marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}^2$
- $(X_1, Y_1) * \cdots * (X_n, Y_n) = (X_1 + \cdots + X_n, Y_1 + \cdots + Y_n, A_n)$
- *Alors*

$$S_n = \mathrm{dil}_{n^{-1/2}}((X_1, Y_1) * \cdots * (X_n, Y_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (B_1, A_1)$$

- $(B_t)_{t \geqslant 0} = (B_{t,1}, B_{t,2})_{t \geqslant 0}$ mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$

Un TCL sur le groupe d'Heisenberg

Théorème

- $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ *incréments marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}^2$
- $(X_1, Y_1) * \cdots * (X_n, Y_n) = (X_1 + \cdots + X_n, Y_1 + \cdots + Y_n, A_n)$
- *Alors*

$$S_n = \mathrm{dil}_{n^{-1/2}}((X_1, Y_1) * \cdots * (X_n, Y_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (B_1, A_1)$$

- $(B_t)_{t\geqslant 0} = (B_{t,1}, B_{t,2})_{t\geqslant 0}$ mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$
- $(A_t)_{t\geqslant 0}$ aire de Lévy de la trajectoire brownienne :

$$A_t = \frac{1}{2}\left(\int_0^t B_{s,1} dB_{s,2} - \int_0^t B_{s,2}\, dB_{s,1}\right)$$

Quelques mots sur le groupe d'Heisenberg

- Le processus $(B_t, A_t)_{t \geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^3$ est markovien

Quelques mots sur le groupe d'Heisenberg

- Le processus $(B_t, A_t)_{t \geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^3$ est markovien
- La mesure de Lebesgue est invariante et symétrique

Quelques mots sur le groupe d'Heisenberg

- Le processus $(B_t, A_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^3$ est markovien
- La mesure de Lebesgue est invariante et symétrique
- C'est une diffusion non-elliptique de générateur

$$L = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \quad \text{où} \quad X = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z \quad \text{et} \quad Y = \partial_x + \frac{1}{2}x\partial_z$$

Quelques mots sur le groupe d'Heisenberg

- Le processus $(B_t, A_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^3$ est markovien
- La mesure de Lebesgue est invariante et symétrique
- C'est une diffusion non-elliptique de générateur

$$L = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \quad \text{où} \quad X = \partial_x - \frac{1}{2} y \partial_z \quad \text{et} \quad Y = \partial_x + \frac{1}{2} x \partial_z$$

- Nilpotence : $Z := [X, Y] = \partial_z$ et autres crochets tous nuls

Quelques mots sur le groupe d'Heisenberg

- Le processus $(B_t, A_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^3$ est markovien
- La mesure de Lebesgue est invariante et symétrique
- C'est une diffusion non-elliptique de générateur

$$L = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \quad \text{où} \quad X = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z \quad \text{et} \quad Y = \partial_x + \frac{1}{2}x\partial_z$$

- Nilpotence : $Z := [X, Y] = \partial_z$ et autres crochets tous nuls
- Hypoellipticité et géométrie sous-riemannienne

Quelques mots sur le groupe d'Heisenberg

- Le processus $(B_t, A_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^3$ est markovien
- La mesure de Lebesgue est invariante et symétrique
- C'est une diffusion non-elliptique de générateur

$$L = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \quad \text{où} \quad X = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z \quad \text{et} \quad Y = \partial_x + \frac{1}{2}x\partial_z$$

- Nilpotence : $Z := [X, Y] = \partial_z$ et autres crochets tous nuls
- Hypoellipticité et géométrie sous-riemannienne
- Le semigroupe est de convolution pour $*$:

$$p_t(g, g') = p_1(0, \mathrm{dil}_t(g^{-1} * g'))$$

TCL pour processus de Markov

Fonctionnelles additives

- $(X_t)_{t \geqslant 0}$ processus de Markov de diffusion sur $\mathbb{R}^d$

Fonctionnelles additives

- $(X_t)_{t\geqslant 0}$ processus de Markov de diffusion sur $\mathbb{R}^d$
- Irréductible récurrent positif, loi invariante μ, générateur L

Fonctionnelles additives

- $(X_t)_{t \geqslant 0}$ processus de Markov de diffusion sur $\mathbb{R}^d$
- Irréductible récurrent positif, loi invariante μ, générateur L
- Fonctionnelle additive pour une observable $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$:

$$S_t = \int_0^t f(X_s)\, ds$$

Fonctionnelles additives

- $(X_t)_{t\geqslant 0}$ processus de Markov de diffusion sur $\mathbb{R}^d$
- Irréductible récurrent positif, loi invariante μ, générateur L
- Fonctionnelle additive pour une observable $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$:

$$S_t = \int_0^t f(X_s)\, ds$$

- Théorème ergodique : presque sûrement

$$\frac{S_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} m(f) := \int f(x)\, d\mu(x)$$

Fonctionnelles additives

- $(X_t)_{t\geqslant 0}$ processus de Markov de diffusion sur $\mathbb{R}^d$
- Irréductible récurrent positif, loi invariante μ, générateur L
- Fonctionnelle additive pour une observable $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$:

$$S_t = \int_0^t f(X_s)\,ds$$

- Théorème ergodique : presque sûrement

$$\frac{S_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} m(f) := \int f(x)\,d\mu(x)$$

- Théorème central limite :

$$\frac{S_t - tm(f)}{\sqrt{tv(f)}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Fonctionnelles additives

- $(X_t)_{t\geqslant 0}$ processus de Markov de diffusion sur $\mathbb{R}^d$
- Irréductible récurrent positif, loi invariante μ, générateur L
- Fonctionnelle additive pour une observable $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$:

$$S_t = \int_0^t f(X_s)\,ds$$

- Théorème ergodique : presque sûrement

$$\frac{S_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} m(f) := \int f(x)\,d\mu(x)$$

- Théorème central limite :

$$\frac{S_t - tm(f)}{\sqrt{tv(f)}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

- $v(f) = \mathrm{Var}_\mu(\Gamma_L g)$ où $f - m(f) = Lg$ (équation de Poisson)

Une approche martingale

- Operateur carré du champ : $\Gamma(g) = L(g^2) - 2gLg$

Une approche martingale

- Operateur carré du champ : $\Gamma(g) = L(g^2) - 2gLg$
- Méthode martingales et formule d'Itô :

$$M_t := g(X_t) - g(X_0) - \underbrace{\int_0^t (Lg)(X_s)\, ds}_{S_t}$$

Une approche martingale

- Operateur carré du champ : $\Gamma(g) = L(g^2) - 2gLg$
- Méthode martingales et formule d'Itô :

$$M_t := g(X_t) - g(X_0) - \underbrace{\int_0^t (Lg)(X_s)\, ds}_{S_t}$$

- Théorème ergodique :

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \Gamma(g)(X_s)\, ds = t \int \Gamma(g)\, d\mu + o_{t\to\infty}(t).$$

Une approche martingale

- Operateur carré du champ : $\Gamma(g) = L(g^2) - 2gLg$
- Méthode martingales et formule d'Itô :

$$M_t := g(X_t) - g(X_0) - \underbrace{\int_0^t (Lg)(X_s)\,ds}_{S_t}$$

- Théorème ergodique :

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \Gamma(g)(X_s)\,ds = t \int \Gamma(g)\,d\mu + o_{t\to\infty}(t).$$

- Solution équation de Poisson + TCL martingales

Une approche martingale

- Operateur carré du champ : $\Gamma(g) = L(g^2) - 2gLg$
- Méthode martingales et formule d'Itô :

$$M_t := g(X_t) - g(X_0) - \underbrace{\int_0^t (Lg)(X_s)\, ds}_{S_t}$$

- Théorème ergodique :

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \Gamma(g)(X_s)\, ds = t \int \Gamma(g)\, d\mu + o_{t\to\infty}(t).$$

- Solution équation de Poisson + TCL martingales
- Conditions sur $\mathcal{L}(X_0)$, L, μ, et f

Une approche martingale

- Operateur carré du champ : $\Gamma(g) = L(g^2) - 2gLg$
- Méthode martingales et formule d'Itô :

$$M_t := g(X_t) - g(X_0) - \underbrace{\int_0^t (Lg)(X_s)\,ds}_{S_t}$$

- Théorème ergodique :

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \Gamma(g)(X_s)\,ds = t \int \Gamma(g)\,d\mu + o_{t\to\infty}(t).$$

- Solution équation de Poisson + TCL martingales
- Conditions sur $\mathcal{L}(X_0)$, L, μ, et f
- Première preuve cas diffusif (1986) : Kipnis et Varadhan

Merci pour votre attention !