

Covariance de modèles d'interfaces et marches aléatoires en environnement aléatoire

Djèlil CHAFAÏ

<mailto:chafai@math.ups-tlse.fr>

<http://www.lsp.ups-tlse.fr/Chafai/>

Laboratoire de Statistique et Probabilités

Université Paul Sabatier

Exposé au Groupe de Travail de Probabilités

19 Novembre 2001*

Résumé

Dans cet exposé, on montre comment la covariance de certaines mesures de probabilité quasi-gaussiennes en mécanique statistique, liées à des modèles d'interfaces, s'exprime comme la fonction de GREEN d'une marche aléatoire¹ en temps continu et en environnement aléatoire par le biais de la représentation de HELFFER-SJÖSTRAND de la covariance.

Objectif : Le but est de rester accessible à tous tout en intéressant les spécialistes. L'exposé servira d'introduction et de motivation à un exposé ultérieur de Thierry DELMOTTE sur son travail récent [DD01] en collaboration avec Jean-Dominique DEUSCHEL sur certaines marches aléatoires en milieu aléatoire.

Mots clés : marche aléatoire, marche aléatoire en environnement aléatoire, développement en chemins, processus à sauts à temps continu, processus de diffusion, laplacien de WITTEN, modèles d'interfaces, mécanique statistique, inégalité de trou spectral (ou de POINCARÉ), inégalité de BRASCAMP-LIEB, critère \mathbf{I}_2 intégré.

Table des matières

1	L'exemple (gaussien) du cristal harmonique	2
1.1	Identification : quelques évidences	3
1.2	Covariance et fonction de Green	4
1.3	Rappel sur le problème de Dirichlet discret	6
1.4	Spectre du laplacien discret	6

*Version provisoire et pleine d'erreurs compilée le 29 novembre 2002.

¹Le chapitre 7 de [GJ87] s'intitule : « Covariance Operator = Green's Function = Resolvent Kernel = Euclidean Propagator = Fundamental Solution ».

2	Représentation de Helffer-Sjöstrand de la covariance	7
2.1	Lien avec le critère gamma-deux intégré	9
3	Modèles non gaussiens (mais quasi-gaussiens) d’interfaces	10
A	Quelques remarques	14
A.1	Pourquoi interface ?	14
A.2	Lien avec les modèles champ moyen	14
A.3	Ajout de masse, de champ magnétique, etc.	15
A.4	Interprétation gibbsienne	16
A.5	Que se passe-t-il sur tout le réseau	16
A.6	Jargon de physiciens	17
B	Rappels sur les diffusions	17
B.1	Semi-groupe et générateur infinitésimal	19
B.2	Résolution du problème de Dirichlet associé	22
B.3	Équations d’évolution de Fokker-Planck-Kolmogorov	22
B.4	Lien avec les opérateurs de Schrödinger	23
C	Laplacien sur les champs de vecteurs	25
D	Rappel sur le complexe de De Rham	30
D.1	Formes multilinéaires alternées et produit extérieur	31
D.2	Formes différentielles et différentiation extérieure	31
D.3	Théorème de Poincaré	33
D.4	Laplacien sur les formes différentielles	35
D.5	Laplacien de Witten sur les formes différentielles	36
D.6	Lien avec les opérateurs de Schrödinger	36
	Bibliographie	37

On trouvera une présentation succincte de l’utilisation des représentations en marches aléatoires pour des modèles gradients et leur utilisation pour l’étude du phénomène de répulsion entropique dans un article de « survol » de BOLTHAUSEN [Bol01]. La représentation de HELFFER-SJÖSTRAND de la covariance est présentée dans [Hel98b] et développée pour les modèles d’interfaces non gaussiens dans l’article de DEUSCHEL, GIACOMIN et IOFFE [DGI00]. On pourra également consulter les travaux récents de DELMOTTE, DEUSCHEL, GIACOMIN, OLLA et SPOHN [GOS01, DD01].

1 L’exemple (gaussien) du cristal harmonique

Soit $\Lambda := \{1, \dots, L\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ une « boîte » finie de \mathbb{Z}^d , avec $d \in \mathbb{N}^*$. Parfois il faudra prendre $d > 1$ ou même $d > 2$. On note $|\Lambda|$ le cardinal de Λ , valant ici L^d . Pour $i, j \in \mathbb{Z}^d$, on note $i \sim j$ lorsque $|i - j|_1 = 1$, c’est à dire lorsqu’ils sont voisins sur le réseau \mathbb{Z}^d . On définit le bord (extérieur) et l’adhérence de Λ par :

$$\partial\Lambda := \{k \notin \Lambda, \exists j \in \Lambda, j \sim i\},$$

$$\bar{\Lambda} := \Lambda \cup \partial\Lambda,$$

Soit également ω un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ qui va jouer le rôle de condition au bord. On définit la mesure gaussienne Q sur \mathbb{R}^Λ par :

$$Q(dx) := Z_Q^{-1} \exp(-H(x)) dx,$$

où

$$H(x) := \frac{1}{4d} \sum_{\{i \sim j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} (x_i - x_j)^2,$$

avec $x_i = \omega_i$ si $i \notin \Lambda$. Le fait que $x \in \mathbb{R}^\Lambda \mapsto \exp(-H(x))$ est dx -intégrable et que la mesure gaussienne Q est bien définie sur \mathbb{R}^Λ n'est pas si immédiat et sera justifié a posteriori. Dans la définition de H , l'expression $\{i \sim j\} \cap \Lambda \neq \emptyset$ signifie que l'on somme sur les arrêtes non orientées ayant au moins une extrémité dans Λ . Les x_i sont appelés *spins*, ici, ils sont réels et non bornés. On omet volontairement la dépendance en Λ et ω pour Q et H afin d'alléger les notations.

1.1 Identification : quelques évidences

Pour tout sous ensemble fini Λ de \mathbb{Z}^d , l'espace \mathbb{R}^Λ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^\Lambda} := \sum_{i \in \Lambda} x_i y_i$ est identifiable, de manière non canonique, à $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$. Toute bijection

$$B : \Lambda \rightarrow \{1, \dots, |\Lambda|\}$$

qui numérote les éléments de Λ fournit une identification de \mathbb{R}^Λ avec $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$, via l'isométrie linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_B : \mathbb{R}^\Lambda &\rightarrow \mathbb{R}^{|\Lambda|} \\ x &\mapsto (x_{B^{-1}(1)}, \dots, x_{B^{-1}(|\Lambda|)}). \end{aligned}$$

Si B_1 et B_2 sont deux identifications de Λ avec $\{1, \dots, |\Lambda|\}$, alors $\mathcal{I}_{B_2} \circ \mathcal{I}_{B_1}^{-1}$, analogue d'un changement de carte en géométrie, n'est rien d'autre que l'endomorphisme $\mathcal{P}_{B_1 \circ B_2^{-1}}$ qui permute les coordonnées $\{1, \dots, |\Lambda|\}$ de $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$. C'est donc un isomorphisme linéaire et orthogonal de $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$:

$$\langle x, \mathcal{I}_{B_2} \circ \mathcal{I}_{B_1}^{-1}(x) \rangle_{\mathbb{R}^{|\Lambda|}} = \sum_{i=1}^{|\Lambda|} x_i (\mathcal{I}_{B_1}^{-1}(x))_{B_2^{-1}(i)} = \sum_{i=1}^{|\Lambda|} x_i x_{B_1(B_2^{-1}(i))} = \langle x, M_{B_1 \circ B_2^{-1}} x \rangle_{\mathbb{R}^{|\Lambda|}}.$$

On identifie par un isomorphisme de groupes le groupe $\mathcal{S}_{|\Lambda|}$ des permutations de $\{1, \dots, |\Lambda|\}$ à un sous-groupe du groupe orthogonal de \mathbb{R}^n par :

$$\sigma \in \mathcal{S}_{|\Lambda|} \mapsto M_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq |\Lambda|} \in \mathcal{O}_{|\Lambda|}(\mathbb{R}).$$

On a donc $M_{\sigma_1} M_{\sigma_2} = M_{\sigma_1 \sigma_2}$ et $M_\sigma^{-1} = M_\sigma^\top = M_{\sigma^{-1}}$. Si \mathcal{Q} est une forme quadratique sur \mathbb{R}^Λ , B_1 une identification à $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$ et M_1 la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$ de la forme quadratique $\mathcal{Q} \circ \mathcal{I}_{B_1}$, alors si B_2 est une autre identification à $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$, la matrice M_2 de la forme quadratique $\mathcal{Q} \circ \mathcal{I}_{B_2}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$ est $M_2 = M_\sigma M_1 M_\sigma^{-1} = M_\sigma M_1 M_\sigma^\top$ où $\sigma := B_1 \circ B_2^{-1}$. Ainsi, M_2 s'obtient à partir de M_1 en permutant les lignes avec σ^{-1} puis les colonnes avec σ . Les matrices M_1 et M_2 ont le même spectre, et les vecteurs propres de l'une se déduisent de ceux de l'autre en permutant leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$ avec la permutation σ . En particulier, *la convexité d'une fonction $H : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ et la plus petite valeur propre de sa matrice hessienne $\nabla^2 H$ ne dépendent pas de l'identification à $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$ choisie.*

1.2 Covariance et fonction de Green

La fonction $x \mapsto H(x) - H(0)$ est une forme quadratique, et $\nabla^2 H(x)$ est une matrice symétrique qui ne dépend pas de x . Pour tout $m \in \mathbb{R}^\Lambda$ tel que $\nabla H(m) = 0$, i.e. m est un point critique, la formule de TAYLOR appliquée à H donne, pour tout $x \in \mathbb{R}^\Lambda$:

$$H(x) = H(m) + \frac{1}{2} (x - m)^\top \underbrace{\nabla^2 H(x)}_{\text{constante}} (x - m),$$

Comme nous allons le voir, $\nabla^2 H$ est inversible, ce qui entraîne que H est non dégénérée et que m est unique. De plus, nous allons voir que m dépend de ω alors que $\nabla^2 H$ n'en dépend pas. La loi Q est donc une gaussienne de moyenne m et de matrice de covariance $(\nabla^2 H)^{-1}$, et on a

$$Z_Q = e^{-H(m)} \sqrt{\frac{(2\pi)^{|\Lambda|}}{\det \nabla^2 H}}.$$

Calculons $\nabla H(x)$ et $\nabla^2 H$. Un petit calcul donne, pour tout $i \in \Lambda$:

$$\partial_i H(x) = x_i - \frac{1}{2d} \left[\sum_{\substack{k \in \Lambda \\ k \sim i}} x_k + \sum_{\substack{k \notin \Lambda \\ k \sim i}} \omega_k \right],$$

puis pour tout $(i, j) \in \Lambda^2$:

$$\partial_{i,j}^2 H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1/2d & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc

$$\nabla^2 H = \mathbf{I}_\Lambda - \frac{1}{2d} \mathbf{J}_\Lambda =: -\Delta_\Lambda$$

où $(\mathbf{J}_\Lambda)_{i,j} := \delta_{i \sim j}$. La matrice Δ_Λ , vue comme un opérateur sur les fonctions $\mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *laplacien discret* sur Λ . Il n'est pas très difficile de voir que $-\Delta_\Lambda$ est définie positive : c'est le laplacien discret sur l'ensemble fini $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ avec condition au bord de DIRICHLET nulle. En raisonnant uniquement sur H , on peut par exemple déduire la semi-positivité en constatant que $\nabla^2 H$ ne dépend pas de ω et en se ramenant à $\omega = 0$ pour lequel on a d'une part :

$$H_{\omega=0}(x) = \frac{1}{2} x^\top \nabla^2 H x,$$

car $\nabla H_{\omega=0}(0) = 0$ et $H_{\omega=0}(0) = 0$, et d'autre part, par définition :

$$H_{\omega=0}(x) = \frac{1}{4d} \sum_{\{i \sim j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} (x_i - x_j)^2 \geq 0.$$

On peut également invoquer le théorème de GERSHGORIN-HADAMARD². La stricte positivité découle du fait que la dernière somme n'est nulle que pour x constant et égal à ω par propagation, ce qui donne $x = 0$ car $\omega = 0$. On a donc justifié a posteriori l'existence de Q . En fait,

²Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors son spectre est contenu dans l'union de boules $\cup_{i=1}^n B(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$. Pour le voir, considérons une valeur propre λ et un vecteur propre associé y . On a pour tout i : $\sum_{j=1}^n A_{ij} y_j = \lambda y_i$, d'où le résultat en prenant i tel que pour tout $j = 1, \dots, n$, on ait $|y_j| \leq |y_i|$. Ce petit théorème, classique en analyse numérique et matricielle, cf. [HJ90, sec. 6.1] est particulièrement efficace lorsque la matrice A est à diagonale dominante. Il a été utilisé par exemple avec succès dans [Mal01] par Florent MALRIEU pour appliquer le critère \mathbf{I}_2 à des systèmes d'É.D.S. linéarisés.

on sait diagonaliser explicitement Δ_Λ , comme expliqué dans la section 1.4 page 6. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^\Lambda$:

$$H(x) = \frac{1}{2} x^\top (-\Delta_\Lambda) x + x^\top (-\Delta_{\mathbb{Z}^d})(\omega|_{\partial\Lambda}) + \frac{1}{4d} \|\omega|_{\partial\Lambda}\|_2^2,$$

où $\omega|_{\partial\Lambda}$ est prolongé par 0 sur $\mathbb{Z}^d \setminus \partial\Lambda$, et

$$\log Z_Q = \frac{|\Lambda|}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log \det \Delta_\Lambda + \frac{1}{4d} \|\omega|_{\partial\Lambda}\|_2^2.$$

La loi gaussienne Q est de moyenne $(-\Delta_{\mathbb{Z}^d})(\omega|_{\partial\Lambda})$. Considérons à présent $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d et τ_Λ le temps de sortie de Λ défini par :

$$\tau_\Lambda := \inf \{n \geq 0, \eta_n \notin \Lambda\}.$$

Lorsque $\eta_0 \in \Lambda$, τ_Λ est également le temps d'atteinte de $\partial\Lambda$. Comme Λ est fini, le temps d'arrêt τ_Λ est fini p.s. et même intégrable, cf. [Law91, lem. 1.4.4]. La fonction de GREEN de $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée \mathbf{G}_Λ , est définie pour tout i, j dans Λ par :

$$(\mathbf{G}_\Lambda)_{i,j} := \mathbf{E}^i \left(\sum_{n=0}^{\tau_\Lambda-1} \mathbf{I}_{\{\eta_n=j\}} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}^i(\eta_n = j, \tau_\Lambda > n).$$

Elle comptabilise le nombre moyen de passages en j de la marche partant de i avant de sortir de Λ . vue comme une matrice carrée, elle est symétrique. En prenant $f = 0$ et $g = \delta_i$ pour $i \in \Lambda$ dans l'expression probabiliste de la solution du problème de DIRICHLET discret présentée dans la section section 1.3 page 6, on obtient dans $\mathcal{M}_{|\Lambda|}(\mathbb{R})$:

$$-\Delta_\Lambda \mathbf{G}_\Lambda = \mathbf{I}_\Lambda. \tag{1}$$

On prendra garde à ne pas confondre la condition au bord ω de la loi Q avec celle du problème de Dirichlet utilisé, qui est nulle. Ainsi, $-\Delta_\Lambda$ est inversible et l'on a obtenu, pour tout i, j dans Λ :

$$\mathbf{Cov}_Q(x_i, x_j) = \mathbf{G}_\Lambda(i, j) := \mathbf{E}^i \left(\sum_{n=0}^{\tau_\Lambda-1} \mathbf{I}_{\{\eta_n=j\}} \right). \tag{2}$$

La matrice de covariance de Q n'est donc rien d'autre que la fonction de GREEN de la marche aléatoire simple tuée à sa sortie de Λ . On remarquera qu'elle ne dépend pas des conditions au bord ω . En fait, ω n'intervient que dans la moyenne de Q . Ainsi, les corrélations des spins x_i sous Q ne dépendent pas de ω .

Le phénomène de transience-réurrence de la marche aléatoire simple permet de montrer que $\mathbf{G}_\Lambda(i, i)$ est de l'ordre de L pour $d = 1$, de l'ordre de $\log L$ pour $d = 2$ et reste borné pour $d \geq 3$, cf. [Law91, Spi76]. De plus, pour tout $i, j \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{G}_\Lambda(i, j)$ se comporte en $|j - i|^{2-d}$ lorsque i et j sont suffisamment éloignés et éloignés du bord et L assez grand. Alternativement, la connaissance explicite du spectre de Δ_Λ , cf. section 1.4, donne une information « diagonale » sur \mathbf{G}_Λ , alors que la base de diagonalisation donne la structure des corrélations (hors diagonale).

Que se passe-t-il pour la covariance si l'on remplace le carré dans la définition de H par une fonction V convexe plus générale ? La réponse à cette question sera fournie par les sections qui suivent. Une chose est sûre : la mesure obtenue n'est plus gaussienne et les calculs que nous avons fait n'ont plus lieu d'être.

1.3 Rappel sur le problème de Dirichlet discret

Le problème de DIRICHLET discret sur l'ensemble fini Λ consiste à se donner une fonction $f : \partial\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $f \in \mathbb{R}^{\partial\Lambda}$), et à chercher une fonction $h : \bar{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $h \in \mathbb{R}^{\bar{\Lambda}}$) telle que $h = f$ sur $\partial\Lambda$ et $\Delta_\Lambda(h|_\Lambda) = 0$ sur Λ . On montre que ce problème possède une unique solution h , dite *harmonique* sur Λ associée à f , donnée en tout $i \in \bar{\Lambda}$ par :

$$h(i) = \mathbf{E}^i(f(\eta_{\tau_\Lambda})) = \sum_{j \in \partial\Lambda} f(j) \mathbb{P}^i(\eta_{\tau_\Lambda} = j).$$

La probabilité d'atteinte $\mathbb{P}^i(\eta_{\tau_\Lambda} = \bullet)$ du bord $\partial\Lambda$ est appelée *mesure harmonique*. Il est facile de vérifier en utilisant la propriété de MARKOV forte que l'on a bien affaire à une solution. L'unicité peut être obtenue en utilisant le théorème d'arrêt pour la martingale bornée $M_n := f(\eta_{n \wedge \tau_\Lambda})$ associée à la filtration naturelle de $(\eta_n, n \in \mathbb{N})$, comme expliqué dans [Law91, th. 1.4.5]. Plus généralement, si l'on remplace la condition d'harmonicité $\Delta_\Lambda(h|_\Lambda) = 0$ par $\Delta_\Lambda(h|_\Lambda) = -g$ où $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, alors l'expression probabiliste de la solution devient [Law91, th. 1.4.6 et ex. 1.5.11] :

$$\begin{aligned} h(i) &= \mathbf{E}^i \left(f(\eta_{\tau_\Lambda}) + \sum_{j=0}^{\tau_\Lambda-1} g(\eta_j) \right) \\ &= \sum_{j \in \partial\Lambda} f(j) \mathbb{P}^i(\eta_{\tau_\Lambda} = j) + \sum_{k \in \Lambda} g(k) \mathbf{G}_\Lambda(i, k). \end{aligned}$$

Vous connaissez sans doute mieux l'analogie continue pour un domaine régulier D de \mathbb{R}^n avec le mouvement brownien $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$:

$$\Delta \mathbf{E}^\bullet(f(B_{\tau_{D^c}})) = 0,$$

où τ_{D^c} est le temps d'atteinte de ∂D et Δ le laplacien \mathbb{R}^n défini par $\partial_{11}^2 + \dots + \partial_{nn}^2$. De façon plus générale, on peut exprimer de la même manière la solution du problème de DIRICHLET associé à un opérateur différentiel elliptique en terme du processus de MARKOV associé et de son temps d'atteinte du bord du domaine, cf. [Bas98, Bas95] et [KS91].

1.4 Spectre du laplacien discret

Le laplacien discret Δ_Λ se diagonalise à partir de la diagonalisation du laplacien continu Δ sur $[0, 1]^d \in \mathbb{R}^n$ avec conditions au bord nulles (de DIRICHLET), cf. [BAD96]. En effet, l'opérateur Δ est symétrique sur l'espace de SOBOLEV³ $H_0^2([0, 1]^d)$ et son spectre est discret. Une base orthonormée de diagonalisation de $-\Delta$ sur cet espace est donnée par les vecteurs $(e_n, n \in \mathbb{N}^{*d})$, définis par :

$$e_n(t) := 2^{d/2} \prod_{i=1}^d \sin(\pi n_i t_i),$$

et associés aux valeurs propres

$$\lambda_n := \pi^2 |n|_2^2 = \pi^2 (n_1^2 + \dots + n_d^2),$$

Revenons à présent au laplacien discret Δ_Λ et prenons pour simplifier

$$\Lambda = L]0, 1[^d \cap \mathbb{Z}^d = \{1, \dots, L-1\}^d.$$

³C'est par définition l'adhérence de $C_c^\infty([0, 1]^d)$ pour la topologie de $H_0^2([0, 1]^d)$: $\|f\|^2 := \|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2$.

Alors, $-\Delta_\Lambda$ se diagonalise dans la base suivante :

$$e_n^L(k) := e_n\left(\frac{k}{L}\right), \quad k, n \in \Lambda,$$

associés aux valeurs propres

$$\lambda_n^L := 2 \sum_{i=1}^d \sin^2\left(\frac{\pi n_i}{2L}\right).$$

On a donc :

$$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2L}\right) \mathbf{I}_\Lambda \leq -\Delta_\Lambda \leq 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2L}\right) \mathbf{I}_\Lambda.$$

Les e_n^L sont nuls sur la frontière externe de Λ et on a de plus :

$$\min_{n \in \Lambda} \lambda_n^L = \lambda_{(1, \dots, 1)}^L = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2L}\right) \downarrow 1/(2L^2)$$

et

$$\max_{n \in \Lambda} \lambda_n^L = \lambda_{(L-1, \dots, L-1)}^L = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2L}\right) \uparrow 2.$$

On voit bien que $-\Delta_\Lambda$ dégénère lorsque $L \rightarrow +\infty$. En utilisant le critère \mathbf{I}_2 , l'estimée en L^{-2} de la plus petite valeur propre fournit des inégalités de POINCARÉ et de log-SOBOLEV pour la loi Q du champ harmonique associé, avec une constante en L^2 . En d'autres termes, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{Var}_Q(f) \leq 2 L^2 \mathbf{E}_Q\left(\sum_{i \in \Lambda} |\partial_i f|^2\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{Ent}_Q(f^2) \leq 4 L^2 \mathbf{E}_Q\left(\sum_{i \in \Lambda} |\partial_i f|^2\right),$$

où $\mathbf{Ent}_Q(f^2) := \mathbf{E}_Q(f^2 \log f^2) - \mathbf{E}_Q(f^2) \log \mathbf{E}_Q(f^2)$.

2 Représentation de Helffer-Sjöstrand de la covariance

Soit $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \exp(-H(x))$ est dx -intégrable, et μ la loi de probabilité sur \mathbb{R}^n définie par :

$$\mu(dx) := Z_\mu^{-1} e^{-H(x)} dx.$$

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lisses. Leur covariance $\mathbf{Cov}_\mu(f, g)$ étant invariante par translation (ajout de constantes à f et g), il est naturel de se demander si elle ne possède pas une représentation en fonction uniquement de ∇f et ∇g . D'autant plus que BRASCAMP et LIEB ont montré en 1976 [BL76] que si H est strictement convexe (i.e. $\nabla^2 H > 0$) alors

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq \mathbf{E}_\mu\left(\nabla f \cdot (\nabla^2 H)^{-1} \nabla f\right) \quad (\text{B\&L})$$

Considérons l'opérateur différentiel linéaire du second ordre associé à μ et défini par :

$$\mathbf{L} := \Delta - \nabla H \cdot \nabla.$$

On a alors la formule d'intégration par parties (GREEN-STOCKES) pour toutes fonctions à support compact $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{E}_\mu(f \mathbf{L} g) = -\mathbf{E}_\mu(\nabla f \cdot \nabla g), \quad (3)$$

et la formule de BOCHNER, bien connue également :

$$\nabla \mathbf{L} = \mathbf{L} \nabla - \nabla^2 H \nabla =: \vec{\mathbf{L}} \nabla. \quad (4)$$

Dans le membre de droite cette formule, \mathbf{L} agit sur chaque composante de ∇ et $\nabla^2 H \nabla$ est un produit d'une matrice par un vecteur dans \mathbb{R}^n . Pour clarifier les choses, cela s'écrit également, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et tout i dans $\{1, \dots, n\}$:

$$(\vec{\mathbf{L}} \nabla f)_i = \partial_i(\mathbf{L}f) = \mathbf{L}(\partial_i f) - \sum_{j=1}^n \partial_{ij}^2 H \partial_j f.$$

L'opérateur $\vec{\mathbf{L}}$, appelé parfois laplacien de WITTEN, est un opérateur sur les champs de vecteurs, et donc en particulier sur les gradients de fonctions, cf. section C page 25. Formalisons le problème : pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on cherche $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que pour tout $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{Cov}_\mu(f, g) \stackrel{?}{=} \mathbf{E}_\mu(\nabla h \cdot \nabla g) \stackrel{\text{I.P.P.}}{=} -\mathbf{E}_\mu((\mathbf{L}h)g).$$

Comme \mathbf{L} est markovien, $\mathbf{E}_\mu(\mathbf{L}h) = 0$ et donc :

$$\mathbf{E}_\mu((f - \mathbf{E}_\mu(f) + \mathbf{L}h)(g - \mathbf{E}_\mu(g))) = 0,$$

ce qui revient à dire que $f - \mathbf{E}_\mu(f) + \mathbf{L}h$ est orthogonal dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ aux fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ centrées, et comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est dense, $f - \mathbf{E}_\mu(f) + \mathbf{L}h$ est constante et vaut donc 0 car \mathbf{L} est markovien. L'équation que doit vérifier h est donc :

$$f - \mathbf{E}_\mu(f) = -\mathbf{L}h,$$

reste à exprimer ∇h en fonction de ∇f . D'après la formule de BOCHNER (4), on a :

$$\nabla f = -\nabla \mathbf{L}h =: -\vec{\mathbf{L}} \nabla h. \quad (5)$$

Il suffit donc de prendre formellement h tel que $-\vec{\mathbf{L}} \nabla h = \nabla f$ pour obtenir la représentation de la covariance, dite de HELFFER-SJÖSTRAND ([HS94]) :

$$\mathbf{Cov}_\mu(f, g) = \mathbf{E}_\mu \left(\left\langle (-\vec{\mathbf{L}})^{-1} \nabla f, \nabla g \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \right), \quad (\text{H\&S})$$

qui n'est valable que lorsque $(\vec{\mathbf{L}})^{-1} \nabla f$ a un sens. On peut également se poser le problème de la plus grande classe de fonctions à laquelle peuvent appartenir f et g pour que la formule garde un sens. Ainsi, on ramène l'étude de la covariance de μ à une analyse de l'opérateur $\vec{\mathbf{L}}$.

Faisons à présent le lien avec l'inégalité (B&L). Formellement, on a, au sens des opérateurs symétriques :

$$-\vec{\mathbf{L}} \geq \nabla^2 H.$$

Lorsque qu'il existe une constante $\rho > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 H(x) \geq \rho \mathbf{I}_n$ au sens des matrices symétriques, on doit pouvoir donner un sens à $(\vec{\mathbf{L}})^{-1}$ de telle sorte que

$$(-\vec{\mathbf{L}})^{-1} \leq (\nabla^2 H)^{-1}$$

au sens des opérateurs symétriques. On retrouve alors l'inégalité de BRASCAMP-LIEB (B&L) évoquée précédemment, qui donne immédiatement une inégalité de POINCARÉ de constante ρ^{-1} :

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{\rho} \mathbf{E}_\mu(|\nabla f|^2). \quad (\text{IP}(\rho))$$

Remarque 2.1. Formellement, c'est l'expression probabiliste de la solution du problème de DIRICHLET vectoriel (5), sous forme « aplanie » (cf. remarque 29 page 29), qui va généraliser à des modèles non gaussiens l'écriture de la covariance sous forme de fonction de GREEN d'une marche aléatoire obtenue dans la première partie pour le cristal harmonique.

Remarque 2.2. NADDAF et SPENCER ont utilisé la représentation de HELFFER-SJÖSTRAND pour étudier l'homogénéisation de systèmes de spins « gradients » à potentiel quasi-gaussien englobant le cas des champs gaussiens harmoniques avec masse [NS97].

2.1 Lien avec le critère gamma-deux intégré

Pour les connaisseurs, la formule de HELFFER-SJÖSTRAND peut être vue comme une reformulation du critère \mathbf{I}_2 intégré. Rappelons que l'on définit Γ et \mathbf{I}_2 par :

$$\Gamma(f, g) := \frac{1}{2} [\mathbf{L}(fg) - g\mathbf{L}f - f\mathbf{L}g] \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_2(f, g) := \frac{1}{2} [\mathbf{L}\Gamma(f, g) - \Gamma(g, \mathbf{L}f) - \Gamma(f, \mathbf{L}g)].$$

En notant $\Gamma f := \Gamma(f, f)$ et $\mathbf{I}_2 f := \mathbf{I}_2(f, f)$, on a donc :

$$\Gamma f = |\nabla f|^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_2 f = \left(\|\nabla^2 f\|_2^2 + \nabla f \cdot \nabla^2 H \nabla f \right).$$

Le critère \mathbf{I}_2 -intégré affirme l'équivalence entre l'existence d'une constante $\rho > 0$ telle que $\mathbf{E}_\mu(\mathbf{I}_2 f) \geq \rho \mathbf{E}_\mu(\Gamma f)$ pour toute $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lisse et une inégalité de POINCARÉ ($\mathbf{IP}(\rho)$) pour μ , le passage entre les deux formulations pouvant se faire grâce au semi-groupe de diffusion (markovien) associé à \mathbf{L} , cf. par exemple [ABC⁺00, chap. 5]. Faisons le lien avec l'opérateur $\vec{\mathbf{L}}$. On peut écrire :

$$\mathbf{E}_\mu(\mathbf{I}_2 f) = \mathbf{E}_\mu((\mathbf{L}f)^2) = -\mathbf{E}_\mu(\langle \nabla f, \nabla \mathbf{L}f \rangle_{\mathbb{R}^n}) = \mathbf{E}_\mu\left(\left\langle \nabla f, (-\vec{\mathbf{L}})\nabla f \right\rangle_{\mathbb{R}^n}\right).$$

Donc le critère \mathbf{I}_2 intégré

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad \mathbf{E}_\mu(\mathbf{I}_2 f) \geq \rho \mathbf{E}_\mu(\Gamma f)$$

s'écrit aussi

$$-\vec{\mathbf{L}} \geq \rho \mathbf{Id}$$

au sens des opérateurs symétriques sur le sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}^n)$ des champs de vecteurs qui s'écrivent comme des gradients de fonctions lisses. Ainsi, la formulation en terme de laplacien de WITTEN obtenue par HELFFER et SJÖSTRAND peut être vue comme une façon de faire du \mathbf{I}_2 intégré sans \mathbf{I}_2 , l'expression sous forme d'égalité pour la variance étant formulée d'habitude dans un vocabulaire semi-groupe par les tenants de la culture \mathbf{I}_2 .

Notons bien que cette utilisation du critère \mathbf{I}_2 intégré consiste en une estimation « diagonale » de la covariance, et ne donne donc pas d'information sur les corrélations en général.

Il n'existe pas de critère \mathbf{I}_2 intégré similaire (i.e. sous forme d'équivalence) pour l'inégalité de log-SOBOLEV, mais seulement une condition suffisante : $\mathbf{E}_\mu(g\mathbf{I}_2 \log g) \geq \rho \mathbf{E}_\mu(g\Gamma \log g)$. De même, il ne semble pas exister de formule de représentation pour l'entropie. D'ailleurs, cette dernière ne peut pas se représenter de façon bilinéaire en terme de gradient car elle n'est pas invariante par translation. Mais il existe peut-être d'autres expressions, la question est ouverte.

3 Modèles non gaussiens (mais quasi-gaussiens) d'interfaces

Revenons à la mécanique statistique que nous avons abordée dans la première section et reprenons les mêmes notations. Soit donc $L \in \mathbb{N}^*$ et $\Lambda := \{1, \dots, L\}^d \subset \mathbb{Z}^d$. On a $\mathbb{R}^\Lambda \simeq \mathbb{R}^{L^d}$. Soit également $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^\Lambda$:

$$H(x) := \sum_{\{i \sim j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} V(x_i - x_j),$$

où $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire, lisse avec $0 < a \leq V''(u) \leq b$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, et $x_k = \omega_k$ si $k \notin \Lambda$. Pour $V(u) = u^2/(4d)$, on retrouve le modèle gaussien harmonique sans masse. On définit la mesure de probabilité R sur \mathbb{R}^Λ par :

$$dR(x) := Z_R^{-1} e^{-H(x)} \prod_{i \in \Lambda} dx_i,$$

où $x_i = \omega_i$ pour $i \notin \Lambda$. Elle peut être vue comme la loi de $(x_i, i \in \Lambda)$ sous la loi \bar{R} sur $\mathbb{R}^{\bar{\Lambda}}$ définie par :

$$d\bar{R}(x) := dR(x) \prod_{i \in \partial\Lambda} \delta_{\omega_i}(dx_i),$$

Une fonction $f : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ peut toujours être vue comme une fonction $\bar{f} : \mathbb{R}^{\bar{\Lambda}} \rightarrow \mathbb{R}$ ne dépendant pas des coordonnées dans $\partial\Lambda$, et on a alors $\mathcal{L}_R(f) = \mathcal{L}_{\bar{R}}(\bar{f})$.

Par analogie avec le cas gaussien, calculons $\nabla^2 H$. Pour tous $x \in \mathbb{R}^\Lambda$ et $i, j \in \Lambda$, on obtient :

$$\partial_{ij}^2 H(x) = \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, k \sim i} V''(x_i - x_k) & \text{si } i = j \\ -V''(x_i - x_j) & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec toujours $x_k = \omega_k$ si $k \notin \Lambda$. Notons que contrairement au cas gaussien pour lequel nous avons $V'' = 1$, ici $\nabla^2 H$ dépend a priori des conditions aux bord ω . Cela dit, comme $V'' \geq 0$, on a $\nabla^2 H \geq 0$ d'après le théorème de GERSHGORIN-HADAMARD, et en remplaçant $u \mapsto V(u)$ par $u \mapsto V(u) - au^2/2$ d'une part et par $u \mapsto bu^2/2 - V(u)$ d'autre part, on obtient finalement que :

$$-2da\Delta_\Lambda \leq \nabla^2 H \leq -2db\Delta_\Lambda,$$

au sens des matrices symétriques. Bien entendu, on retrouve le champ gaussien harmonique sans masse pour $a = b = 1/(2d)$. Cette comparaison ne donne pas d'informations hors diagonale, et seules les variances sont comparables via les inégalités de BRASCAMP-LIEB ou de POINCARÉ. Nous voulons donc savoir s'il existe une représentation de la covariance similaire à (2), qui permettrait d'exploiter les travaux existants sur les fonctions de GREEN discrètes non gaussiennes⁴.

On note $\mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\bar{\Lambda}\mathbb{R}^\Lambda$ dans \mathbb{R} . Si $F \in \mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}$, on note $F_i(x) := F(i, x)$ pour tout $(i, x) \in \bar{\Lambda}\mathbb{R}^\Lambda$. On note également $\mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}^0$ les éléments F de $\mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}$ tels que $F_i(\bullet) \equiv 0$ pour tout $i \in \partial\Lambda$. Une fonction $f : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend naturellement en un élément de $\mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}^0$ en la prolongeant par 0 sur $\partial\Lambda$. On muni l'espace $\bar{\Lambda}\mathbb{R}^\Lambda$ de la mesure produit $\sigma \otimes R$ où σ

⁴Par exemple le travail de thèse de Thierry DELMOTTE [Del97, chap. 6], qui fait appel aux inégalités de HARNACK (cf. [Law91, SC99]) et qui a motivé [DD01].

est la mesure uniforme sur Λ (ça n'est pas une probabilité). Définissons à présent le générateur infinitésimal \mathbb{L} sur $\mathbf{L}^2(\overline{\Lambda}\mathbb{R}^\Lambda, \sigma \otimes R) \subset \mathcal{M}_{\overline{\Lambda}}$, de domaine $\mathcal{D}_{\mathbb{L}} \subset \mathcal{M}_{\overline{\Lambda}}^0$ par :

$$(\mathbb{L}F)(i, x) := ((\mathbb{L}F)(x))_i := \mathbf{L}_x(F_i(x)) + \sum_{\{i \sim j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} V''(x_j - x_i)(F_j(x) - F_i(x)),$$

où $x_i = \omega_i$ si $i \notin \Lambda$ et

$$\mathcal{D}_{\mathbb{L}} := \left\{ F \in \mathcal{M}_{\overline{\Lambda}}^0, \forall i \in \Lambda, F_i \in \mathcal{C}^{2,\varepsilon}(\mathbb{R}^\Lambda, \mathbb{R}) \right\},$$

et

$$\mathcal{C}^{2,\varepsilon}(\mathbb{R}^\Lambda, \mathbb{R}) := \left\{ F : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \sup_x |F_i(x)| \exp\left(-\varepsilon \sum_{j \in \Lambda} |x_j|\right) < +\infty \right\}.$$

Pour tout $(i, x) \in \overline{\Lambda}\mathbb{R}^\Lambda$ et $F \in \mathcal{D}_{\mathbb{L}} \subset \mathcal{M}_{\overline{\Lambda}}^0$, on a :

$$\begin{aligned} ((\mathbb{L}F)(x))_i &:= \mathbf{L}_x(F_i(x)) - \sum_{j \in \Lambda} \partial_{ij}^2 H(x) F_j(x) \\ &= \mathbf{L}_x(F_i(x)) - (\nabla^2 H F_\bullet(x))_i, \end{aligned}$$

Notez bien que l'écriture basée sur H du second terme de \mathbb{L} n'est possible que grâce au fait que F est nulle sur $\partial\Lambda$ car $F \in \mathcal{M}_{\overline{\Lambda}}^0$. L'opérateur \mathbb{L} est symétrique pour le produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(\overline{\Lambda}\mathbb{R}^\Lambda, \sigma \otimes R)$

$$\langle F, G \rangle := \mathbf{E}_{\sigma \otimes R}(FG) = \sum_{i \in \overline{\Lambda}} \mathbf{E}_R(F_i G_i),$$

et on a pour F et G dans $\mathcal{M}_{\overline{\Lambda}}^0$:

$$\langle F, \mathbb{L}G \rangle = - \sum_{i \in \Lambda} \mathbf{E}_R(\nabla F_i \cdot \nabla G_i) - \mathbf{E}_R(\langle \nabla^2 H F_\bullet, G_\bullet \rangle_{\mathbb{R}^\Lambda}).$$

Reprenons la démarche de HELFFER & SJÖSTRAND. Nous avons pour toutes fonctions f et g dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\Lambda, \mathbb{R})$, centrées sous R :

$$\mathbf{Cov}_R(f, g) = \mathbf{E}_R(\nabla h \cdot \nabla g) = \langle H, G \rangle,$$

où $(H, G) := (\nabla h, \nabla g)$ (gradients prolongés par 0 sur $\partial\Lambda$) et où h est solution de $\mathbf{L}\nabla h = \nabla f$, ce qui s'écrit également $\mathbb{L}H = F$. Ce problème admet une solution d'après le théorème de LAX-MILGRAM, dont les hypothèses sont satisfaites ici car $V'' \geq a > 0$. Or l'opérateur \mathbb{L} est un générateur de MARKOV (en particulier $\mathbb{L}1 = 0$, mais attention, 1 n'est pas dans $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$ mais dans $\mathcal{M}_{\overline{\Lambda}}$), ce qui est dû aux interactions aux plus proches voisins puisque pour tout $i \in \Lambda$ et tout $x \in \mathbb{R}^\Lambda$:

$$\sum_{j \in \Lambda} \partial_{ij}^2 H(x) - \sum_{j \in \partial\Lambda} V''(x_i - \omega_j) = 0.$$

On montre alors avec le théorème d'arrêt pour les martingales U.I. (cf. [DGI00]) que la solution H du problème de DIRICHLET précédent admet une représentation probabiliste en fonction du processus de MARKOV $(\eta_t, X_t)_{t \geq 0}$ de générateur \mathbb{L} :

$$(x, i) \in \Lambda\mathbb{R}^\Lambda \mapsto H_i(x) = \mathbf{E}^{x,i} \left(\int_0^{\tau_\Lambda} F_{\eta_t}(X_t) dt \right) := \mathbf{E} \left(\int_0^{\tau_\Lambda} F_{\eta_t}(X_t) dt \mid (X_0, \eta_0) = (x, i) \right),$$

où

$$\tau_\Lambda := \inf \{t \geq 0, \eta_t \notin \Lambda\}.$$

On a donc en définitive :

$$\mathbf{Cov}_R(f, g) = \mathbf{E}_R \left(\sum_{k \in \Lambda} (\partial_k g) \mathbf{E}^{k,x} \left(\int_0^{\tau_\Lambda} (\partial_{\eta_t} f)(X_t) dt \right) \right), \quad (6)$$

Comme cela est expliqué plus loin dans la remarque 3.1, la structure du générateur \mathbb{L} entraîne que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une diffusion sur \mathbb{R}^Λ de générateur \mathbf{L} . Le processus $(\eta_t)_{t \geq 0}$ est un processus de MARKOV à valeurs dans l'ensemble fini $\bar{\Lambda}$ et à environnement aléatoire. Sa loi sachant une trajectoire particulière $\varphi : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \varphi_t \in \mathbb{R}^\Lambda$ de la diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$ est donnée par le générateur markovien discret $A_t := A_{\varphi_t}$ défini par :

$$(A_x)_{i,j} := \begin{cases} V''(x_i - x_j) & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice de transition des sauts est donnée par :

$$(P_t)_{i,j} = \frac{V''((\varphi_t)_i - (\varphi_t)_j)}{\sum_{\{k \sim i\} \cap \Lambda \neq \emptyset} V''((\varphi_t)_i - (\varphi_t)_k)} \delta_{i \sim j} + \delta_{i=j},$$

et les intensités des sauts (paramètres des lois exponentielles des temps d'attente entre les sauts) par :

$$(\lambda_t)_i = \sum_{\{k \sim i\} \cap \Lambda \neq \emptyset} V''((\varphi_t)_i - (\varphi_t)_k),$$

et bien entendu, $A_t = \text{Diag}(\lambda_t) (P_t - \mathbf{I}_{\bar{\Lambda}})$. Sur Λ , le processus $(\eta_t)_{t \geq 0}$ coïncide avec la marche aléatoire dans \mathbb{Z}^d à temps continu et en environnement aléatoire dont l'environnement est donné par les trajectoires de la diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$. Lorsque $f(x) = x_i$ et $g(x) = x_j$, on a $\partial_k f = \delta_{ki}$ et $\partial_k g = \delta_{kj}$ et on obtient dans ce cas :

$$\mathbf{Cov}_R(x_i, x_j) = \mathbf{E}_R \left(\mathbf{E}^{x,i} \left(\int_0^{\tau_\Lambda} \mathbf{I}_{\{\eta_t=j\}} dt \right) \right). \quad (7)$$

Il n'est pas étonnant que la covariance de deux spins x_i et x_j soit positive puisque la mesure satisfait aux hypothèses F.K.G.⁵ : $\nabla^2 H \geq 0$ et $\partial_{i \neq j}^2 H \leq 0$. Notons que l'hypothèse $V'' \leq b$ ne semble pas jouer de rôle dans l'établissement de la représentation de la covariance mais plutôt dans son utilisation pour obtenir des comportements hors diagonaux de la matrice de covariance des spins.

Pour le cristal harmonique, on a $V(u) = u^2/(4d)$ donc $V'' = 1/(2d)$ et $\nabla^2 H = \mathbf{I}_\Lambda - (1/(2d))\mathbf{J}_\Lambda$ ne dépend plus de x . Les deux processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(\eta_t)_{t \geq 0}$ sont alors indépendants, $(\eta_t)_{t \geq 0}$ est une marche aléatoire simple et (7) devient :

$$\mathbf{Cov}_R(x_i, x_j) = \mathbf{E}^i \left(\int_0^{\tau_\Lambda} \mathbf{I}_{\{\eta_t=j\}} dt \right). \quad (8)$$

L'ajout d'un terme linéaire $\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i x_i$ dans l'hamiltonien H se fait sans problème. De même, tout ceci reste valable sur un réseau connexe localement fini et homogène avec des potentiels

⁵Pour FORTUIN, KASTELEYN et GINIBRE, cf. [GJ87].

$V_{\{i,j\}}(x_i - x_j)$ lisses strictement convexes qui dépendent de l'arrête non orientée $\{i, j\}$. Pour ces modèles, quasi-gaussiens, la représentation de la covariance (6) a été utilisée avec succès par DEUSCHEL, GIACOMIN, IOFFE et VELENIK (par ex. [DV00, IV00, DGI00]) pour généraliser des résultats obtenus précédemment par BOLTHAUSEN, DEUSCHEL et ZEITOUNI (par ex. [BAD96, BDZ95, Deu96, BDZ00]) pour le modèle gaussien harmonique sans masse. On parle de modèles à action *gradient* car le potentiel s'applique à un gradient discret $x_i - x_j$ pour $i \sim j$. La formule de représentation (6) a été établie dans l'article [DGI00].

Remarque 3.1. Montrons que $\mathcal{L}((X_t)_{t \geq 0})$ est bien celle d'une diffusion de générateur \mathbf{L} . Si $F : (x, i) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\Lambda} \mapsto F(x, i) \in \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$ et ne dépend que de la coordonnée x dans \mathbb{R}^n , on peut noter $F(x, i) = \xi(x)$ et on a pour tout i dans Λ :

$$(\mathbb{L}F)(x, i) = (\mathbf{L}\xi)(x) - \xi(x) \underbrace{\left(\sum_{j \in \Lambda} \partial_{ij}^2 H(x) - \sum_{j \in \bar{\Lambda}, j \sim i} V''(x_i - \omega_j) H(x) \right)}_{=0} = (\mathbf{L}\xi)(x).$$

Intéressons-nous à présent à la loi conditionnelle $\mathcal{L}(\eta_t | X_t)$. On note $(\mathbf{P}_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe de MARKOV de générateur \mathbb{L} associé à $(\eta_t, X_t)_{t \geq 0}$ et $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ celui de générateur \mathbf{L} , associé à $(X_t)_{t \geq 0}$. Soient $\zeta : \bar{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues bornées. On a pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbf{P}_t((\zeta, \xi))(i, x) := \mathbf{E}^{i,x}(\zeta(\eta_t)\xi(X_t)) = \mathbf{E}^{i,x}(\xi(X_t)\mathbf{E}^x(\zeta(\eta_t) | X_t)).$$

On a formellement :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}^{i,x}(\xi(X_t)\mathbf{E}^x(\zeta(\eta_t) | X_t)) &= \partial_t \mathbf{E}^{i,x}(\mathbf{Q}_t(\xi)(x) \mathbf{E}^{i,x}(\zeta(\eta_t) | X_t)) \\ &= \mathbf{E}^{i,x}(\zeta(\eta_t)\mathbf{L}(\xi)(X_t) + \xi(X_t)\partial_t \mathbf{E}^{i,x}(\zeta(\eta_t) | X_t)). \end{aligned}$$

D'autre part, on a par définition de \mathbb{L} :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{P}_t((\zeta, \xi))(i, x) &= \mathbf{P}_t(\mathbb{L}((\xi, \zeta)))(i, x) \\ &= \mathbf{E}^{i,x}(\zeta(\eta_t)\mathbf{L}(\xi)(X_t) + \xi(X_t)A_{X_t}(\zeta)(\eta_t)), \end{aligned}$$

Ainsi, comme ξ est quelconque, on a obtenu que :

$$\partial_t \mathbf{E}^{i,x}(\zeta(\eta_t) | X_t) = (A_{X_t}\zeta)(\eta_t).$$

Remarque 3.2. Quelle est la famille des potentiels H pour lesquels une représentation en marche aléatoire de ce type reste possible? La réponse à cette question est esquissée dans la remarque C.1 page 29.

Remarque 3.3. Dans [BM92], D. BAKRY et D. MICHEL introduisent le générateur $\vec{\mathbf{L}}$ sur $\Lambda \times \mathbb{R}^\Lambda$ afin d'étudier la conservation de la positivité des coordonnées des vecteurs par le semi-groupe associé et d'établir des inégalités F.K.G. Ce travail date de la même époque que celui de HELFFER et SJÖSTRAND [HS94] et est antérieur de dix ans à celui de [DGI00], qui ne s'y réduit pas cependant !

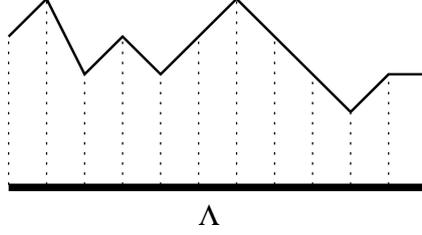


FIG. 1 – Interface dans \mathbb{Z}^1 .

A Quelques remarques

A.1 Pourquoi interface ?

Pour $d = 2$, il faut imaginer Λ comme un substrat et les x_i avec $i \in \Lambda$ comme les altitudes des points de discrétisation d’une interface. La condition au bord ω signifie que l’interface est accrochée au bord $\partial\Lambda$ de Λ , à une altitude donnée par la restriction de ω à $\partial\Lambda$. La mesure Q favorise les configurations qui minimisent l’argument H de l’exponentielle, qui s’interprète alors comme une énergie : l’interface est d’autant moins énergétique qu’elle à la fois « plate » (tous les spins égaux) et proche des conditions au bord, qui l’empêche d’être tout à fait plate lorsqu’elles ne sont pas constantes. Le fait que les configurations d’énergie minimale soient les plus probables constitue un principe de base en physique et en particulier en mécanique statistique. L’expression de la loi des configurations sous forme d’exponentielle de l’opposé de l’énergie découle d’un argument de GIBBS & BOLTZMANN que nous ne détaillons pas ici (maximisation de l’entropie à énergie fixée).

A.2 Lien avec les modèles champ moyen

La loi Q dépend fortement de la « géométrie des interactions », aux plus proches voisins en l’occurrence. A contrario, les modèles « champ moyen », qui ne sont pas des modèles d’interfaces, correspondent au cas où l’on ne tient pas compte de la disposition spatiale des spins pour les interactions. Dans ces modèles, la structure de l’ensemble des spins n’a pas vraiment d’importance et la notion de condition au bord perd son sens. Malgré tout, soit I et B deux sous ensembles finis disjoints non vides de \mathbb{Z}^d . L’énergie H s’écrirait par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}^I$:

$$H(x) = \frac{1}{2|I \cup B|} \sum_{\{i,j\} \subset I \cup B} (x_i - x_j)^2,$$

où $x_i = \omega_i$ si $i \in B$. Ici encore, la matrice hessienne de H ne dépend pas de ω :

$$\nabla^2 H(x) = \mathbf{I}_I - |I \cup B|^{-1} \mathbf{1}_I,$$

où $\mathbf{1}_I$ est la matrice carrée de taille $|I|$ constituée uniquement de 1. Elle est de rang 1 et ses valeurs propres sont 0, de multiplicité $|I| - 1$, et $|I|$, de multiplicité 1, associée au vecteur propre constant $\mathbf{1}_I$. Il en découle que la matrice $\nabla^2 H(x)$ est définie-positive de spectre

$$\left\{ 1 - \frac{|I|}{|I \cup B|}, 1 \right\}$$

et que donc la mesure gaussienne associée est bien définie. Elle est échangeable (i.e. tous les spins x_i avec $i \in I$ ont la même loi) car le modèle est du type champ moyen. De plus,

la diffusion associée sur \mathbb{R}^I , qui n'est rien d'autre qu'un mouvement brownien avec dérive linéaire constante $-\nabla H(x)$, est hypercontractive à I et B fixés. Lorsque $I = \Lambda := \{1, \dots, L\}^d$ et $B = \partial\Lambda$, on a :

$$1 - \frac{|I|}{|I \cup B|} = 1 - \frac{L^d}{L^d + 2dL^{d-1}} \underset{+\infty}{\sim} dL^{-1},$$

à comparer avec le comportement en L^{-2} du modèle aux plus proches voisins. Le théorème de GERSHGORIN-HADAMARD permet de voir que cela reste valable si l'on remplace le carré dans la définition de H par une fonction convexe paire $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $\inf_{\mathbb{R}} V'' > 0$ et $\sup_{\mathbb{R}} V'' < +\infty$.

Remarquons que se sont les conditions au bord qui rendent $x \in \mathbb{R}^\Lambda \mapsto \exp(-H(x))$ intégrable, comme pour le modèle aux plus proches voisins. En effet, sans conditions au bord, on définirait H par :

$$H(x) = \frac{1}{2|\Lambda|} \sum_{\{i,j\} \subset \Lambda} (x_i - x_j)^2,$$

or ici, on a $\nabla^2 H = \mathbf{I}_\Lambda - |\Lambda|^{-1} \mathbf{1}_\Lambda$, qui est dégénérée dans la direction du vecteur $\mathbf{1}_\Lambda$. La mesure gaussienne associée n'est donc pas définie en dehors de l'hyperplan orthogonal au vecteur $\mathbf{1}_\Lambda$. La diffusion $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ associée a pour mesure invariante $\exp(-H(x)) dx$ sur \mathbb{R}^Λ (pensez plutôt au système d'É.D.S. associé : $dX_i = \sqrt{2} dB_i - \nabla H(X_i) dt$, où les B_i sont des mouvements browniens indépendants). Elle n'est pas hypercontractive. Cependant, sa projection sur l'hyperplan orthogonal à $\mathbf{1}$ est hypercontractive, uniformément en L . Ce modèle a été utilisé par Florent MALRIEU récemment, pour approcher un modèle non linéaire. Ici encore, ceci reste valable si l'on remplace le carré dans la définition de H par un V comme précédemment.

A.3 Ajout de masse, de champ magnétique, etc.

On obtient le champ harmonique de masse m en rajoutant à l'énergie H un terme tensorisé du type

$$\frac{m}{2} \sum_{i \in \Lambda} x_i^2,$$

ce qui rend la matrice de covariance définie positive uniformément en L . Sur la dynamique de diffusion associée, cela correspond à de l'hypercontractivité uniforme en L . La marche aléatoire associée a dans ce cas une certaine probabilité de rester sur place. De façon imagée, l'interface a ainsi une certaine « inertie » avec ce terme additionnel de masse, et converge très vite vers un équilibre (ergodicité avec convergence exponentielle). On peut également ajouter à H un terme linéaire de la forme

$$\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i x_i,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^\Lambda$ est fixé. Le vecteur λ correspond à la présence d'un champ extérieur, parfois qualifié de « magnétique », qui oriente l'interface dans la direction contraire, puisque l'énergie H diminue d'autant plus que le produit scalaire $\langle x, \lambda \rangle$ dans \mathbb{R}^Λ est petit dans \mathbb{R} . Ce terme linéaire n'a bien entendu aucun effet sur la covariance du modèle gaussien mais modifie sa moyenne. De façon plus générale, on peut ajouter à H un terme de la forme

$$\sum_{i \in \Lambda} \varphi(x_i),$$

où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction fixée. Ce genre de potentiel permet, par exemple de faire en sorte que les spins « préfèrent » une région particulière de l'espace (pinning). Lorsque φ est convexe, la covariance n'est perturbée que par la matrice diagonale $\text{diag}(\varphi''(x_i), i \in \Lambda)$ positive.

A.4 Interprétation gibbsienne

La loi de probabilité Q peut être vue avec le formalisme des potentiels de GIBBS [Geo88]. En effet, si $K : \mathbb{Z}^d \mathbb{Z}^d \rightarrow [0, 1]$ désigne le noyau de transition de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d :

$$K(i, j) = \frac{1}{2d} \delta_{i \sim j},$$

alors on a :

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{F \subset \mathbb{Z}^d \\ F \cap \Lambda \neq \emptyset}} \mathcal{J}_F(x),$$

où pour tout $F \subset \mathbb{Z}^d$ et $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$:

$$\mathcal{J}_F(x) := \begin{cases} K(i, j) (x_i - x_j)^2 & \text{si } F = \{i, j\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

toujours avec la convention $x_i = \omega_i$ si $i \notin \Lambda$.

A.5 Que se passe-t-il sur tout le réseau

Pour $d \geq 3$ et $\omega = 0$, la mesure Q converge faiblement vers le champ gaussien centré sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dont la covariance est donnée par la fonction de GREEN $\mathbf{G}_{\mathbb{Z}^d}$ de la marche aléatoire simple sur tout \mathbb{Z}^d . De plus, pour tout $i, j \in \mathbb{Z}^d$, on a $\mathbf{G}_{\mathbb{Z}^d}(i, j) = \mathbf{G}_{\mathbb{Z}^d}(0, j - i)$, qui se comporte en $|j - i|^{2-d}$ lorsque i et j sont suffisamment éloignés.

Ici encore, on peut donner une description gibbsienne de la loi de probabilité obtenue sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, cf [BD93]. Une autre manière de modéliser l'interface sur une boîte Λ pour $d \geq 3$ est de partir du champ harmonique centré sur $\mathbf{G}_{\mathbb{Z}^d}$ et de considérer sa loi marginale sur $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. En général, l'étude de certaines propriétés en est facilitée. On pourra consulter [GJ87] pour les développements en terme de chemins de la marche aléatoire simple pour exprimer \mathbf{G}_Λ comme un inverse du laplacien discret $-\Delta_{\mathbb{Z}^d}$. Lorsque $d < 3$, on peut remplacer la marche aléatoire simple par une loi stable, cf. par exemple [BDZ95, BDZ00].

Remarquons enfin que l'on peut voir la loi Q (pour $\omega = 0$) comme une loi de probabilité sur l'espace fonctionnel $\mathbf{L}^2(]0, 1[^d, dx, \mathbb{R})$ en identifiant Λ à $]0, 1[^d$ par interpolation. En la renormalisant correctement, on montre alors qu'elle converge faiblement vers une loi gaussienne infinie-dimensionnelle, centrée, dont la covariance est la fonction de GREEN du problème de DIRICHLET continu avec conditions au bord nulles. La vitesse de la renormalisation dépend de d bien entendu. Tout ceci s'adapte encore si l'on remplace la marche aléatoire simple par une marche aléatoire de noyau de transition K à support fini. Dans ce cas le laplacien continu doit être remplacé par l'opérateur différentiel $\sum_{1 \leq i, j \leq d} A_{i,j} \partial_{i,j}^2$ où A est la matrice symétrique associée à K , définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ par :

$$x \cdot Ax = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} (y \cdot k)^2 K(k, 0),$$

cf. [BAD96].

A.6 Jargon de physiciens

Les modèles gaussiens sont plus faciles à traiter car l'on peut calculer bon nombre d'objets explicitement. Ils se généralisent cependant en remplaçant le carré par une fonction paire convexe, ce qui pour l'instant ne permet pas d'avoir des estimées aussi précises que pour le cas gaussien car les approches sont comparatives. La mesure Q que nous avons introduite est parfois remplacée par la loi marginale sur une boîte finie du champ harmonique sur tout \mathbb{Z}^d . En fait, les modèles les plus intéressants sont ceux qui font intervenir la valeur absolue de la différence des spins, car ils généralisent aux spins continus les modèles discrets appelés SOS (Solid On Solid), qui correspondent à des empilements de petites particules de matière, cf. [Fis84].

Le comportement de la loi Q des spins lorsque la taille de la boîte Λ tend vers l'infini va dépendre de d , des conditions au bord ω mais aussi des divers conditionnements qui peuvent être appliqués à la loi Q , comme par exemple la présence d'un mur infranchissable (hard wall), qui se traduit par la positivité des spins, ou encore une condition sur le volume de l'interface avec conditions aux bord nulles, qui se traduit par une somme constante des valeurs absolue des spins. On peut également ajouter à l'énergie H un potentiel qui fixe certains spins à une valeur ou à une région particulière, on parle alors d'accrochage (pinning). Il y a dans ce cas une compétition énergétique entre cet accrochage, les conditions au bord, et l'éventuelle répulsion entropique (les spins font preuve d'une certaine liberté individuelle). On pourra consulter [Fis84] et [BIV00] pour une présentation de ces problèmes. En dimension $d = 1$, les choses sont assez faciles car les différences de spins successifs peuvent apparaître comme des variables aléatoires indépendantes. Les dimensions $d \geq 3$ sont particulières puisque la marche aléatoire simple est transitoire. La dimension $d = 2$ est la plus « physique », et recèle des mystères, cf. par exemple [DV00, IV00].

En présence d'un mur, on dit que l'interface est localisée lorsque sa variance reste bornée en L . On parle de phénomène de répulsion entropique (entropic repulsion) lorsque l'interface s'éloigne en moyenne du mur « pour que les spins puissent fluctuer ». Ceci peut être exprimé dans le langage des grandes déviations, cf. par exemple [DG00, DG99], [BDZ00, Deu96, BDZ95], [BI97], [BD93].

Comme d'habitude en mécanique statistique, la probabilité Q sur la boîte finie Λ doit se comprendre comme une description microscopique, dont le comportement asymptotique lorsque la taille L de Λ tend vers l'infini donne une idée du résultat macroscopique. Les échelles intermédiaires, mésoscopique, peuvent jouer un rôle (technique?) important, cf. par exemple [BI97]. Le comportement des corrélations des spins joue un rôle important et influe sur le comportement de la dynamique macroscopique associée.

L'objet macroscopique étudié est souvent modélisé par un formalisme continu, et une boîte finie de \mathbb{Z}^d peut être vue comme la discrétisation d'un cube de \mathbb{R}^d . Ceci peut conduire, en fonction des facteurs de renormalisation, à des résultats limites, cf. par exemple la construction de la gouttelette sur $[-1, +1]^d$ dans [BAD96], et l'homogénéisation dans [NS97], voir aussi [FS97].

B Rappels sur les diffusions

Ce qui suit, à quelques ajouts personnels près, est livre [Roy99] de ROYER. On pourra consulter également dans un cadre plus « markovien » [Bak94]. Enfin, les livres [Yos80], [Kat95] et le plus récent [HS96] constituent des références très riches pour le versant analyse fonctionnelle.

Soit $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui va jouer le rôle d'un champ d'énergie potentielle et $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$

un mouvement brownien standard à valeurs dans \mathbb{R}^n , issu de zéro, associé à sa filtration naturelle complétée $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$. On considère l'É.D.S. suivante, dite de LANGEVIN-EINSTEIN-WIENER :

$$\begin{aligned} dX_t &= \sqrt{2} dB_t - \nabla H(X_t) dt \\ &= dB_{2t} - \nabla H(X_t) dt. \end{aligned}$$

Le facteur $\sqrt{2}$ est juste là pour que l'opérateur différentiel qui va intervenir plus loin ait une forme plus simple sans coefficient de ce type. En termes physiques, cette équation est une écriture de la relation fondamentale de la dynamique pour une particule, de vitesse X_t au temps t , qui subit une agitation brownienne (« chocs ») et une force de résistance à l'avancement (« frottements ») associée au potentiel H , puisqu'on a formellement en divisant par dt :

$$A_t := \frac{dX_t}{dt} = \frac{dB_{2t}}{dt} - \nabla H(X_t),$$

où A_t représente l'accélération de la particule au temps t , $W_t := dB_t/dt$ un « bruit blanc » (processus gaussien de corrélation δ_{t-s}) et $-\nabla H(X_t)$ la force de résistance à l'avancement, qui dépend de la vitesse X_t . Pensez à l'exemple donné par $H(x) = x^2/2$, pour lequel la force $-\nabla H(X_t)$ vaut exactement $-X_t$ et X_t n'est rien d'autre que le processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK. Le mouvement brownien s'obtient en l'absence de potentiel (i.e. $H = 0$). Bien entendu, tout ceci est purement formel car les trajectoires du brownien ne sont pas dérivables. De façon rigoureuse, on adopte une formulation intégrée : si X_0 est une v.a. \mathcal{F}_0 -mesurable (position initiale), on cherche un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ adapté tel que :

$$X_t = X_0 + B_{2t} - \int_0^t \nabla H(X_s) ds.$$

La seule propriété de H importante ici est le fait que ∇H est localement lipschitzien. On montre alors, par une démarche similaire à celle de la preuve du théorème classique de CAUCHY-LIPSCHITZ pour les équations différentielles, que pour presque tout ω , cette équation admet une solution unique $t \mapsto X_t(\omega)$ définie sur un intervalle maximal $[0, T(\omega)[$ avec $T(\omega) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Le processus $(X_t, t \in [0, T])$ est adapté et la v.a. T est un temps d'arrêt à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. De plus, pour tout ω tel que $T(\omega) < +\infty$, on a $\lim_{t \rightarrow T(\omega)-} |X_t(\omega)| = +\infty$, et on dit que le processus « explose » (blows up) en ω .

Le processus solution est appelé parfois diffusion de KOLMOGOROV-MARKOV associé au potentiel H . D'un point de vue probabiliste, il s'agit d'un mouvement brownien avec dérive. S'il n'explose pas, on montre⁶ que pour tout t , la loi de ses trajectoires sur $\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^n)$ est absolument continue par rapport à la loi d'un mouvement brownien $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ issu du même point, avec la densité :

$$\exp \left(-(H(W_{2t}) - H(W_0)) - \int_0^t V(W_{2s}) ds \right), \quad (9)$$

où

$$V(x) := \frac{1}{4} |\nabla H(x)|^2 - \frac{1}{2} \Delta H(x).$$

Il reste à déterminer une classe de potentiels H pour lesquels la solution associée n'explose pas, i.e. tels que $T = +\infty$ p.s. On montre, en utilisant la formule d'ITÔ, que c'est le cas si H vérifie par exemple l'une des deux hypothèses suivantes :

⁶Grâce à la formule de CAMERON-MARTIN elle-même découlant de l'application du théorème de GIRSANOV.

1. $H(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\inf_{\mathbb{R}^n} (|\nabla H(x)|^2 - \Delta H(x)) > -\infty$
2. $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \cdot \nabla H(x) \geq -a|x|^2 - b$

Ces deux conditions sont simultanément satisfaites par les fonctions quadratiques $H(x) = (x \cdot Mx)/2$ où M est une matrice symétrique constante, et le processus associé est un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK pour $M = \mathbf{I}_n$ et un mouvement brownien pour $M = 0$. Considérons le cas plus général où il existe une constante $\rho \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\nabla^2 H(x) \geq \rho \mathbf{I}_n$ au sens des matrices symétriques⁷. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, le théorème des accroissements finis, sous forme d'égalité, appliqué à la fonction $t \in [0, 1] \mapsto (y - x) \cdot \nabla H(x + t(y - x)) \in \mathbb{R}$ entraîne :

$$(x - y) \cdot (\nabla H(x) - \nabla H(y)) \geq \rho |x - y|^2.$$

Soit $\varepsilon > 0$, en prenant $y = 0$ dans l'expression précédente, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot \nabla H(x) \geq \rho_\varepsilon |x|^2 - b_\varepsilon,$$

où $\rho_\varepsilon := \rho - \varepsilon \text{sign}(\rho)$ et b_ε est bien choisi. Ceci fournit alors en intégrant $t \in [0, 1] \mapsto H(tx) \in \mathbb{R}$:

$$H(x) \geq \frac{\rho_\varepsilon}{2} |x|^2 - c.$$

Le processus solution de notre É.D.S. n'explose donc pas dans ce cas et de plus, la fonction $x \mapsto \exp(-H(x))$ est intégrable sur \mathbb{R}^n lorsque $\rho > 0$.

B.1 Semi-groupe et générateur infinitésimal

Dans la suite de cette section, on supposera que $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est tel que le processus solution n'explose pas. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathbf{P}_t(f)(x) := \mathbf{E}(f(X_t) | X_0 = x).$$

En d'autres termes, $\mathbf{P}_t(\bullet)(x) = \mathcal{L}(X_t | X_0 = x)$. On montre que la mesure positive sur \mathbb{R}^n ,

$$\mu(dx) := \exp(-H(x)) dx$$

est réversible par rapport aux lois \mathbf{P}_t , c'est-à-dire que pour toutes fonctions boréliennes $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\mathbf{P}_t(g)(x)) \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (\mathbf{P}_t(f)(x)) \mu(x).$$

Lorsque cela est possible, on normalisera μ en une loi de probabilité :

$$\mu(dx) := Z_\mu^{-1} \exp(-H(x)) dx.$$

Dans ce cas, la réversibilité implique l'invariance de μ :

$$\mathcal{L}(X_0) = \mu \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \mathcal{L}(X_t) = \mu.$$

Le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\mu$ de deux fonctions $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ se notera $\mathbf{E}_\mu(fg)$ lorsque μ est normalisable en une probabilité.

⁷Ceci signifie que le spectre de $\nabla^2 H$ est minoré par ρ , uniformément en x .

Revenons au cas général, avec H tel qu'il n'y ait pas explosion. L'unicité des solutions de notre É.D.S. et la propriété de MARKOV du mouvement brownien permettent de voir que la famille $(\mathbf{P}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un semi-groupe : pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$ et toutes fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\mathbf{P}_{t+s}(f) = \mathbf{P}_t(\mathbf{P}_s(f))$. Lorsqu'on le restreint aux fonctions continues bornées $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on parle de semi-groupe de MARKOV, cf. [Bak94].

Il est clair que ce semi-groupe fournit un semi-groupe continu de contractions autoadjointes dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$. On définit son domaine $\mathcal{D}_2(\mathbf{L}) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{D}_2(\mathbf{L}) = \left\{ f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}), \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{P}_t(f) - f}{t} \text{ existe dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}) \right\}$$

On définit alors l'opérateur non borné $\bar{\mathbf{L}}$ de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ de domaine $\mathcal{D}_2(\mathbf{L})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{D}_2(\mathbf{L}), \bar{\mathbf{L}}f := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{P}_t(f) - f}{t}.$$

Nous verrons plus loin (page 25) sa généralisation $\vec{\mathbf{L}}$ aux champs de vecteurs. On sait, cf. [Roy99], que le générateur infinitésimal d'un tel semi-groupe continu de contractions est autoadjoint, et négatif :

$$\langle f, \vec{\mathbf{L}}f \rangle_\mu \leq 0 \text{ sur } \mathcal{D}_2(\mathbf{L}).$$

De plus, $\mathcal{D}_2(\mathbf{L})$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$. En tant qu'opérateur autoadjoint positif, $-\bar{\mathbf{L}}$ possède une décomposition spectrale de la forme :

$$-\bar{\mathbf{L}} = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE_\lambda,$$

où $(E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+)$ est une famille croissante et continue à droite de projecteurs orthogonaux de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, dx, \mathbb{R})$. Les sauts de cette famille correspondent aux valeurs propres alors que les points de continuité correspondent au spectre continu. Il n'y a pas de spectre résiduel. Lorsque μ se normalise en une probabilité, les fonctions constantes sont dans $\mathcal{D}_2(\mathbf{L})$ et $\bar{\mathbf{L}}1 = 0$, on en déduit que $0 \in \sigma(\bar{\mathbf{L}})$ et que le noyau de $\bar{\mathbf{L}}$ contient les constantes. On dit que $\bar{\mathbf{L}}$ possède un *trou spectral* lorsque son noyau est réduit aux constantes et que $\inf \mathbb{R}_+^* \cap \sigma(-\bar{\mathbf{L}}) > 0$. On note alors λ cet infimum. Considérons à présent les opérateurs \mathbf{L} et \mathbf{L}' définis sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ par :

$$\mathbf{L} := \Delta - \nabla H \cdot \nabla = \operatorname{div} \nabla - \nabla H \cdot \nabla,$$

et

$$\mathbf{L}' := \Delta + \operatorname{div}(\bullet \nabla H) = \Delta + \nabla H \cdot \nabla + \bullet \Delta H.$$

Ces deux opérateurs différentiels sont en quelque sorte « adjoints » l'un de l'autre dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, dx, \mathbb{R})$ puisque pour toutes $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \mathbf{L}g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g \mathbf{L}'f \, dx.$$

On peut montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $|\nabla f|$ bornée et $\mathbf{L}f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$, alors $f \in \mathcal{D}_2(\mathbf{L})$ et $\bar{\mathbf{L}}f = \mathbf{L}f$. En fait, toute fonction $f \in \mathcal{D}_2(\mathbf{L})$ vérifie cette équation au sens des distributions. Notons que pour $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a la formule :

$$\langle f \bar{\mathbf{L}}g \rangle_\mu = \langle f \mathbf{L}g \rangle_\mu = -\langle \nabla f \cdot \nabla g \rangle_\mu.$$

En particulier, si $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, alors on a les formules d'intégration par parties (ou de GREEN-STOCKES) :

$$\langle f \mathbf{L} g \rangle_\mu = \langle g \mathbf{L} f \rangle_\mu = -\langle \nabla f \cdot \nabla g \rangle_\mu = \langle f \bar{\mathbf{L}} g \rangle_\mu = \langle g \bar{\mathbf{L}} f \rangle_\mu,$$

qui montrent que si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est dans le noyau de $\bar{\mathbf{L}}$, alors elle est constante. On peut enfin montrer que le domaine de $\bar{\mathbf{L}}$ est exactement

$$\mathcal{D}_2(\bar{\mathbf{L}}) = \{f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}) \text{ t.q. } \bar{\mathbf{L}} f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})\}$$

et que $\bar{\mathbf{L}}$ est *essentiellement autoadjoint*⁸ sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ce qui justifie a posteriori la notation $\bar{\mathbf{L}}$. La décomposition spectrale de $\bar{\mathbf{L}}$ permet de donner un sens à l'opérateur non borné $(-\bar{\mathbf{L}})^{1/2}$, ce qui permet de définir la forme quadratique non bornée \mathcal{E} , appelée forme de DIRICHLET associée à $\bar{\mathbf{L}}$, par :

$$\mathcal{E}(f, f) := \langle (-\bar{\mathbf{L}})^{1/2} f (-\bar{\mathbf{L}})^{1/2} f \rangle_\mu,$$

pour $f \in \mathcal{D}_2(\bar{\mathbf{L}}^{1/2})$. Comme $\sqrt{x} \leq 1 + x/2$, le théorème spectral implique que $\mathcal{D}_2(\mathbf{L}) \subset \mathcal{D}_2((-\bar{\mathbf{L}})^{1/2})$ et on a pour $f \in \mathcal{D}_2(\mathbf{L})$:

$$\mathcal{E}(f, f) = -\langle f \bar{\mathbf{L}} f \rangle_\mu.$$

Puisque H est localement bornée, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ et le domaine de \mathcal{E} est exactement $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ et on a alors :

$$\mathcal{E}(f, f) = \langle |\nabla f|^2 \rangle_\mu.$$

En conséquence, pour toute $f \in \mathcal{D}_2(\mathbf{L}) \cap \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$, on a :

$$-\langle f \bar{\mathbf{L}} f \rangle_\mu = \langle |\nabla f|^2 \rangle_\mu,$$

ce qui implique en particulier que tout élément du noyau de $\bar{\mathbf{L}}$ à support compact est constant. On montre que l'opérateur $\bar{\mathbf{L}}$ a un trou spectral $\lambda > 0$ si et seulement si pour tout $f \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq \lambda^{-1} \mathcal{E}(f, f) = \lambda^{-1} \mathbf{E}_\mu(|\nabla f|^2),$$

qui n'est rien d'autre qu'une inégalité de POINCARÉ.

Remarque B.1 (Le mouvement brownien libre sur \mathbb{R}^n). Notons que pour $H = 0$, $d\mu(x) = dx$ n'est pas une probabilité, $\mathbf{L} = \mathbf{\Delta}$ et $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un mouvement brownien $(B_{2t}, t \geq 0)$. On montre [HS96, exe. 7.5 p. 73] que $\mathbf{\Delta}$ est autoadjoint sur $\mathcal{D}_2(\mathbf{\Delta}) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n, dx, \mathbb{R})$, qu'il n'y a pas de valeurs propres. Le spectre est donc purement essentiel et on montre qu'il est égal à tout $] -\infty, 0]$. Il n'y a donc pas de trou spectral ni d'inégalité de POINCARÉ. A contrario, le laplacien sur un ouvert régulier borné Ω de \mathbb{R}^n , associé au domaine $\mathbf{H}_0^2(\Omega, dx, \mathbb{R})$, possède toujours un trou spectral, qui décroît comme l'inverse du carré du diamètre de Ω . Dans ce dernier cas, $H = +\infty \mathbf{I}_{\Omega^c}$ et le processus de KOLMOGOROV associé est un brownien arrêté au bord de Ω .

⁸Un opérateur non borné \mathbf{A} de domaine $\mathcal{D}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{H}$ où \mathcal{H} est un espace de HILBERT est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{H}$ lorsqu'il est symétrique (i.e. pour tous $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$, $\langle f, \mathbf{A}g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{A}f, g \rangle_{\mathcal{H}}$) et à spectre $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$. En d'autres termes, lorsque sa fermeture est autoadjointe.

B.2 Résolution du problème de Dirichlet associé

Soit $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que μ se normalise en une probabilité et que le processus solution de notre É.D.S. n'explode pas. Supposons également que $\bar{\mathbf{L}}$ possède un trou spectral $\lambda > 0$, ou de manière équivalente que μ vérifie une inégalité de POINCARÉ sur $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de moyenne nulle, il existe un et un seul $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $-\bar{\mathbf{L}}g = f$, et l'on a de plus $\text{supp}(g) \subset \text{supp}(f)$.

L'unicité découle simplement du fait que le noyau de $\bar{\mathbf{L}}$ est réduit aux constantes et qu'une fonction à support compact est constante si et seulement si elle est nulle. L'existence est moins facile à obtenir. Soit \mathcal{H} l'espace de HILBERT obtenu en prenant l'adhérence des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de moyenne nulle et de support inclus dans $\text{supp}(f)$ pour la topologie de $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$. Tout élément de \mathcal{H} est de moyenne nulle, et l'inégalité de POINCARÉ entraîne alors que la norme de $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ définie par

$$\|u\|^2 := \mathbf{E}_\mu(u^2) + \mathbf{E}_\mu(|\nabla u|^2),$$

est équivalente à la norme $\mathbf{E}_\mu(|\nabla u|^2)^{1/2}$. Le théorème de LAX-MILGRAM⁹ appliqué à la forme bilinéaire continue et coercive sur \mathcal{H}

$$A(u, v) := -\mathbf{E}_\mu(u \bar{\mathbf{L}}v) = \mathbf{E}_\mu(\nabla u \cdot \nabla v)$$

et à la forme linéaire continue $F(u) := \mathbf{E}_\mu(fu)$ assure l'existence d'un (unique) $v \in \mathcal{H}$ tel que pour tout $u \in \mathcal{H}$:

$$\mathbf{E}_\mu((\bar{\mathbf{L}}v + f)u) = 0,$$

ce qui entraîne que $-\bar{\mathbf{L}}v = f$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ puisque \mathcal{H} est dense dans le sous espace de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ des fonctions dont le support est inclu dans $\text{supp}(f)$. En tant qu'élément de \mathcal{H} , $v \in \mathbf{H}_0^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ et $\text{supp}(v) \subset \text{supp}(f)$. Il ne reste plus qu'à montrer que $v \in \mathbf{H}_0^m(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ pour tout $m > 2$, ce qui doit pouvoir s'obtenir par récurrence sur m via les plongements de SOBOLEV ou encore de façon plus élémentaire en utilisant la méthode des translations de NIREMBERG, cf. [Bré83].

On doit pouvoir montrer de la même manière que si f est dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ et est de moyenne nulle, alors g existe dans $\mathbf{H}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$ et est unique. Lorsque μ ne se normalise pas en une probabilité, ceci doit rester valable pour les f à support compact.

B.3 Équations d'évolution de Fokker-Planck-Kolmogorov

On peut avoir une idée plus précise de la propagation de la loi du processus solution de notre É.D.S. au cours du temps. Supposons ici que $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et qu'il soit tel que le processus solution de notre É.D.S. n'explode pas. On montre alors qu'il existe une fonction

$$p : (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto p(t, x, y) \in \mathbb{R}_+$$

dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $t > 0$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée :

$$\mathbf{P}_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)p(t, x, y) dy$$

⁹Classique en analyse fonctionnelle, il généralise le théorème de représentation de RIESZ, cf. [Bré83] : si A est une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de HILBERT \mathcal{H} (i.e., $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2, \forall(u, v) \in \mathcal{H}^2, A(u, u) \geq \alpha|u|^2$ et $|A(u, v)| \leq \beta|u||v|$), alors, pour toute forme linéaire continue $F \in \mathcal{H}'$, il existe un unique $u \in \mathcal{H}$ tel que $A(u, \bullet) = F$ dans \mathcal{H}' . De plus, lorsque A est symétrique, u est caractérisé par la formulation variationnelle $\frac{1}{2}A(u, u) - F(u) = \min_{v \in \mathcal{H}} \{ \frac{1}{2}A(v, v) - F(v) \}$.

(en d'autres termes $\mathcal{L}(X_t | X_0 = x) = p(t, x, y) dy$), de plus, p vérifie les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\partial_t p = \mathbf{L}_x p \quad \text{et} \quad \partial_t p = \mathbf{L}'_y p,$$

appelées respectivement « forward » et « backward » FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV, qui généralisent en quelque sorte l'équation de la chaleur (correspondant quant à elle à $H = 0$).

B.4 Lien avec les opérateurs de Schrödinger

Nous adoptons ici une normalisation un peu différente, mieux adaptée aux formules qui vont suivre. Les normalisations usuelles sont listées dans la table 1 page 26. Soit donc $\mu(dx) := \exp(-2H(x)) dx$ la mesure positive sur \mathbb{R}^n , qui est la mesure symétrique du générateur de MARKOV $\mathbf{L} := \frac{1}{2} \Delta - \nabla H \cdot \nabla$. Le processus de KOLMOGOROV associé $(X_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'É.D.S. $dX_t = dB_t - \nabla H(X_t) dt$ où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^n . On considère à présent l'application U définie par :

$$U : f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, dx) \mapsto e^H f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \mu),$$

Il est clair qu'il s'agit d'une isométrie linéaire qui conserve l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Cette isométrie transforme l'opérateur non borné $\bar{\mathbf{L}}$ associé à $\mathbf{L} := \Delta - \nabla H \cdot \nabla$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \mu)$ en un opérateur \mathbf{S} sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, dx)$ défini par :

$$\mathbf{S} := U^{-1} \circ \bar{\mathbf{L}} \circ U.$$

Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a facilement que :

$$\mathbf{S}f = e^{-H} \mathbf{L}(f e^H) = \frac{1}{2} (\Delta f - |\nabla H|^2 f + f \Delta H),$$

et donc :

$$\mathbf{S}f = \frac{1}{2} \Delta f - V f,$$

où $V f$ désigne la multiplication de f par le « potentiel » $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$V := \frac{1}{2} (|\nabla H|^2 - \Delta H).$$

Les opérateurs différentiels de la forme $\frac{1}{2} \Delta - V$ sont appelés opérateurs de SCHRÖDINGER. La théorie des opérateurs de SCHRÖDINGER présentée par exemple dans [Kat95] et [HS96] nous dit que lorsque V est borné inférieurement avec $|V(x)| \rightarrow +\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, alors l'opérateur non borné \mathbf{S} est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et son spectre est discret, cf. par exemple [HS96, thm 10.7 p. 103]. A contrario, un autre théorème affirme, lorsque $|V(x)| \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$ et sous une hypothèse supplémentaire sur V , que \mathbf{S} est autoadjoint dans $\mathbf{H}(\mathbb{R}^n, dx, \mathbb{R})$ et que :

$$\sigma(\mathbf{S}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{S}) = \sigma\left(\frac{1}{2} \Delta\right) =] - \infty, 0],$$

cf. par exemple [HS96, thm 13.9, p. 137]. Les opérateurs $\bar{\mathbf{L}}$ et \mathbf{S} ont le même spectre car ils sont conjugués par isométrie linéaire. Formellement, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}^2(\mu) & \xrightarrow{\mathbf{L}} & \mathbf{L}^2(\mu) \\ \downarrow U^{-1} & & \uparrow U \\ \mathbf{L}^2(dx) & \xrightarrow{\mathbf{S}} & \mathbf{L}^2(dx) \end{array}$$

On notera que lorsque $H = 0$, alors $V = 0$ et donc dans ce cas $\mathbf{S} = \mathbf{L} = \frac{1}{2} \Delta$. Plus généralement, si $H(x) = |x|_2^2$, alors $\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\Delta - x \cdot \nabla)$ est un générateur d'ORNSTEIN-UHLENBECK et $V(x) = 2H(x) - n$. Par conséquent, les deux points de vue se confondent pour des potentiels quadratiques, qui correspondent au mouvement brownien et aux processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK, et les potentiels V et H ont la forme d'une énergie cinétique.

Poursuivons notre exploration formelle. Soit $\mathbf{S} := \frac{1}{2} \Delta - V$ l'opérateur de SCHRÖDINGER associé au potentiel $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ supposé continu et borné. La formule de FEYNMAN-KAC fournit un semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ fortement continu sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathbf{Q}_t(f)(x) := \mathbf{E} \left(f(x + B_t) \exp \left(- \int_0^t V(x + B_s) ds \right) \right), \quad (10)$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. Le potentiel V s'interprète de façon probabiliste comme un obstacle au mouvement brownien, cf. [BS02, Szn98, KS91]. Lorsque $V = 0$, on retrouve le semi-groupe de la chaleur et son noyau $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto u(t, x, y)$ donné par :

$$u(t, x, y) := (2\pi t)^{-n/2} \exp \left(- \frac{|y - x|_2^2}{2t} \right).$$

Le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ fournit l'unique solution de l'équation d'évolution de SCHRÖDINGER suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{Q}_t(f) &= \mathbf{S} \mathbf{Q}_t(f) \\ \mathbf{Q}_0(f) &= f \end{cases}.$$

Pour un ouvert D de \mathbb{R}^n , relativement compact et régulier, considérons le problème consistant à trouver $v : \mathbb{R}_+^* \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \partial_t v = \mathbf{S} v & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times D \\ v(0, x) = f(x) & \text{si } x \in \overline{D} \\ v(t, x) = 0 & \text{si } t \geq 0 \text{ et } x \in \partial D \end{cases}$$

On montre en utilisant la formule d'Itô pour une martingale bien choisie que la solution (unique) est du même type que (10) :

$$v(t, x) := \mathbf{E} \left(f(x + B_t) \exp \left(- \int_0^t V(x + B_s) ds \right) \mathbf{I}_{\{T_D > t\}} \right).$$

On pourra trouver plus d'informations sur ce type de problèmes dans [Szn98], [KS91], et leurs bibliographies.

Faisons le lien entre le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ associé à l'opérateur de SCHRÖDINGER \mathbf{S} et le semi-groupe $(\mathbf{P}_t)_{t \geq 0}$ de diffusion associé au générateur $\mathbf{L} := \frac{1}{2} \Delta - \nabla H \cdot \nabla$. Ce dernier semi-groupe fournit l'unique solution de l'équation de la « chaleur » suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{P}_t(f) &= \mathbf{L} \mathbf{P}_t(f) \\ \mathbf{P}_0(f) &= f \end{cases}.$$

Le diagramme commutatif précédent entraîne alors des identités similaires sur les semi-groupes associés :

$$\mathbf{U} \circ \mathbf{P}_t \circ \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{Q}_t \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^{-1} \circ \mathbf{Q}_t \circ \mathbf{U} = \mathbf{P}_t, \quad (11)$$

où $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe généré par $\mathbf{S} := \frac{1}{2} \Delta - V := \frac{1}{2} (\Delta - |\nabla H|^2 - \Delta H)$. Notons que ces identités proviennent du fait que les opérateurs en jeu sont linéaires et linéairement isométriques. Montrons à présent comment établir les formules (11). Comme $\mathbf{L} \circ \mathbf{U} = \mathbf{U} \circ \mathbf{S}$, on a par définition des deux semi-groupes que $\partial_t \mathbf{P}_t(\mathbf{U}(f)) = \mathbf{P}_t(\mathbf{U}(\mathbf{S}f))$. La linéarité de \mathbf{U}^{-1} entraîne sa commutation avec ∂_t et on obtient alors que $\partial_t \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{P}_t(\mathbf{U}(f))) = \mathbf{U}^{-1}(\partial_t \mathbf{P}_t(\mathbf{U}(f)))$. Enfin, par unicité de la solution de l'équation d'évolution de SCHRÖDINGER, on obtient que $\mathbf{Q}_t = \mathbf{U}^{-1} \circ \mathbf{P}_t \circ \mathbf{U}$. Voici une autre façon de procéder, un peu plus formelle mais peut-être plus intuitive :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_t f &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{S}^n f \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\mathbf{U}^{-1} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{U})^n f \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\mathbf{U}^{-1} \circ \mathbf{L}^n \circ \mathbf{U}) f \\ &= \mathbf{U}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{L}^n(\mathbf{U}f) \\ &= \mathbf{U}^{-1} \circ \mathbf{P}_t(\mathbf{U}(f)) =: (\mathbf{U}^{-1} \circ \mathbf{P}_t \circ \mathbf{U})(f). \end{aligned}$$

En exprimant le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ à l'aide de la formule de FEYNMAN-KAC (10) dans l'identité $\mathbf{P}_t = \mathbf{U} \circ \mathbf{Q}_t \circ \mathbf{U}^{-1}$, on obtient :

$$\mathbf{P}_t(f)(x) = \mathbf{E} \left(f(B_{x,t}) \exp \left(-H(x) + H(B_{x,t}) - \frac{1}{2} \int_0^t [|\nabla H|^2 - \Delta H](B_{x,s}) ds \right) \right), \quad (12)$$

où $B_{x,u} := x + B_u$. On a donc retrouvé (9), avec une normalisation différente cependant. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est la diffusion de KOLMOGOROV associée au semi-groupe $(\mathbf{P}_t)_{t \geq 0}$, alors on a par définition $\mathbf{P}_t(f)(x) := \mathbf{E}(f(X_t) | X_0 = x)$ et la formule précédente nous donne la densité explicite de $\mathcal{L}(X_{0 \leq u \leq t} | X_0 = x)$ par rapport à celle du mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ dirigeant l'É.D.S. $dX_t = dB_t - \nabla H(X_t) dt$ et $X_0 = x$. On retrouve une formule de MEHLER lorsque $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK, i.e. lorsque $H(x) = |x|_2^2$. La formule d'absolue continuité (12) peut aussi être obtenue via celles de CAMERON-MARTIN-GIRSANOV, cf. [Roy99].

C Laplacien sur les champs de vecteurs

Par souci de simplicité, cette section se limite aux champs de vecteurs. On renvoie à la section D pour les formes différentielles, qui constituent un cadre plus général et mieux adapté pour définir les opérateurs laplaciens sur des objets multidimensionnels. Les fonctions ou champs de scalaires (0-formes), les champs de vecteurs (1-formes) et les champs de matrices antisymétriques (2-formes) suffisent amplement pour nos besoins dans ce qui suit.

Un champ de vecteur α sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^n est une application

$$\alpha : x \in \mathcal{O} \mapsto \alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

L'exemple le plus simple est donné par le champ des gradients ∇f d'une fonction f différentiable sur \mathcal{O} (au sens de FRÉCHET). À un champ de vecteur α , on peut associer champ de

É.D.S.	Générateur de MARKOV	Mesure symétrique	$\Gamma(f)$	Opérateur de SCHRÖDINGER
$dX_t = \sqrt{2} dB_t - \nabla H(X_t) dt$	$\Delta - \nabla H \cdot \nabla$	$e^{-H(x)} dx$	$ \nabla f ^2$	$-\Delta + \frac{1}{4} \nabla H ^2 - \frac{1}{2} \Delta H$
$dX_t = dB_t - \nabla H(X_t) dt$	$\frac{1}{2} \Delta - \nabla H \cdot \nabla$	$e^{-2H(x)} dx$	$\frac{1}{2} \nabla f ^2$	$\frac{1}{2} (-\Delta + \nabla H ^2 - \Delta H)$
$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \nabla H(X_t) dt$	$\frac{1}{2} (\Delta - \nabla H \cdot \nabla)$	$e^{-H(x)} dx$	$\frac{1}{2} \nabla f ^2$	$\frac{1}{2} \left(-\Delta + \frac{1}{4} \nabla H ^2 - \frac{1}{2} \Delta H \right)$
$dX_t = dB_t - \beta \nabla H(X_t) dt$	$\frac{1}{2} \Delta - \beta \nabla H \cdot \nabla$	$e^{-2\beta H(x)} dx$	$\frac{1}{2} \nabla f ^2$	$\frac{1}{2} (-\Delta + \beta^2 \nabla H ^2 - \beta \Delta H)$
$dX_t = \sqrt{\alpha} dB_t - \nabla H(X_t) dt$	$\frac{\alpha}{2} \Delta - \nabla H \cdot \nabla$	$e^{-2\alpha^{-1} H(x)} dx$	$\frac{\alpha}{2} \nabla f ^2$	$\frac{1}{2} (-\alpha \Delta + \alpha^{-1} \nabla H ^2 - \Delta H)$
$dX_t = \sqrt{\alpha} dB_t - \beta \nabla H(X_t) dt$	$\frac{\alpha}{2} \Delta - \beta \nabla H \cdot \nabla$	$e^{-2\alpha^{-1} \beta H(x)} dx$	$\frac{\alpha}{2} \nabla f ^2$	$\frac{1}{2} (-\Delta + \alpha^{-1} \beta^2 \nabla H ^2 - \beta \Delta H)$

TAB. 1 – Normalisations courantes pour les diffusions de KOLMOGOROV sur \mathbb{R}^n

matrices antisymétriques¹⁰ appelé rotationnel de α et noté $\mathbf{rot} \alpha$:

$$\mathbf{rot} \alpha : \mathcal{O} \mapsto \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n(n-1)/2},$$

défini pour tout $1 \leq i < j \leq n$ par :

$$(\mathbf{rot} \alpha)_{i,j} := \partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i.$$

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, son gradient ∇f est un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{O} . De plus, $\mathbf{rot} \nabla f = 0$ car on a $\partial_{i,j}^2 f - \partial_{j,i}^2 f = 0$ d'après le théorème de SCHWARZ. Réciproquement, un célèbre théorème de POINCARÉ affirme en particulier qu'un champ de vecteurs α sur un ouvert étoilé \mathcal{O} s'écrit comme le gradient d'une fonction si $\mathbf{rot} \alpha = 0$ sur \mathcal{O} .

En tant que fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n , un champ de vecteur peut être différentiable au sens de FRÉCHET. L'ensemble des champs de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{O} est alors par définition l'espace de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$. Dans la suite, on prendra pour simplifier $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mu)$ l'espace de HILBERT des champs de vecteurs de norme euclidienne intégrable pour μ , muni du produit scalaire :

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i \beta_i \rangle_\mu = \langle \alpha \cdot \beta \rangle_\mu, \quad (13)$$

où $\langle f \rangle_\mu$ désigne l'intégrale de f sous μ . Soit H dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que le processus de diffusion de KOLMOGOROV associé n'explose pas. On définit le laplacien de WITTEN $\vec{\mathbf{L}}$ sur les champs de vecteurs comme l'opérateur non borné sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}^n)$ suivant :

$$\vec{\mathbf{L}} := \mathbf{L} \otimes \mathbf{Id} - \nabla^2 H,$$

où $\mathbf{L} := \Delta - \nabla H \cdot \nabla$, de domaine $\mathcal{D}_2(\vec{\mathbf{L}})$ inclus dans $\mathcal{D}_2(\mathbf{L})$. Pour un champ de vecteurs α dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$:

$$\left(\vec{\mathbf{L}} \alpha \right)_i := \mathbf{L}(\alpha_i) - \sum_{j=1}^n \partial_{i,j}^2 H \alpha_j.$$

L'opérateur $-\vec{\mathbf{L}}$ est « symétrique et positif » au sens du produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}^n)$, en ce sens que l'on a¹¹ pour tout champ de vecteurs $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \left\langle (-\vec{\mathbf{L}} \alpha) \cdot \alpha \right\rangle_\mu &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle |\partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i|^2 \rangle_\mu + \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \partial_i \alpha_i - \alpha_i \partial_i H \right)^2 \right\rangle_\mu \\ &=: \langle |\mathbf{rot} \alpha|^2 \rangle_\mu + \langle (\mathbf{div} \alpha - \alpha \cdot \nabla H)^2 \rangle_\mu \geq 0. \end{aligned}$$

¹⁰Pour le lecteur familier avec les formes différentielles, un champ de vecteurs α est une 1-forme, et $\mathbf{rot} \alpha$ n'est rien d'autre que la 2-forme $d\alpha$. On a donc naturellement pour une fonction f que $\mathbf{rot} \nabla f = 0$ car f est une 0-forme et $d \circ d = 0$. Le théorème de POINCARÉ affirme que pour une p -forme α sur un ouvert \mathcal{O} étoilé, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une $(p-1)$ -forme ω sur \mathcal{O} telle que $d\omega = \alpha$ est que $d\alpha = 0$.

¹¹Le lecteur familier avec les formes différentielles reconnaîtra la formule : $\left\langle \|d\alpha\|_2^2 \right\rangle_\mu + \left\langle \|d_H^* \alpha\|_2^2 \right\rangle_\mu$, où d est la différentielle extérieure sur les formes et d_H^* est l'adjoint de d pour le produit scalaire sur l'algèbre graduée $\Omega := \cup_{p=0}^n \Omega^{(p)}$ découlant de celui de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R})$. L'opérateur $-\vec{\mathbf{L}}$ est alors la restriction aux 1-formes du laplacien sur Ω défini par $A_H := d \circ d_H^* + d_H^* \circ d = (d + d_H^*)^2$, qui est positif en tant que laplacien ! Bien entendu $d \circ d = 0$, et donc pour une 0-forme f , on a en particulier $\mathbf{rot} \nabla f = d(d(f)) = 0$ en tant que 2-forme.

Formellement, l'opérateur $\vec{\mathbf{L}}$ possède une unique extension auto-adjointe et la formule précédente reste valable dès qu'elle a un sens. Pour $\alpha = \nabla f$ avec $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a $\mathbf{div} \alpha = \mathbf{div} \nabla f = \Delta f$ et $\mathbf{rot} \alpha = 0$, et la formule précédente s'écrit donc dans ce cas :

$$\left\langle (-\vec{\mathbf{L}} \nabla f) \cdot \nabla f \right\rangle_\mu = \left\langle (\Delta f - \nabla H \cdot \nabla f)^2 \right\rangle_\mu = \left\langle (\mathbf{L}f)^2 \right\rangle_\mu = \langle \mathbf{I}_2 f \rangle_\mu.$$

Pour un champ de vecteurs α dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on a, par la définition (13) du produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}^n)$ et par (3) :

$$\begin{aligned} \left\langle (-\vec{\mathbf{L}} \alpha) \cdot \alpha \right\rangle_\mu &= \sum_{i=1}^n -\langle \alpha_i \mathbf{L}(\alpha_i) \rangle_\mu + \langle \alpha \cdot \nabla^2 H \alpha \rangle_\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \langle |\nabla(\alpha_i)|^2 \rangle_\mu + \langle \alpha \cdot \nabla^2 H \alpha \rangle_\mu, \end{aligned}$$

formule qui reste valable dès qu'elle a un sens. Lorsque H est convexe, on en déduit que le noyau de $\vec{\mathbf{L}}$ ne contient que les champs de vecteurs constants à valeurs dans le noyau de $\nabla^2 H(x)$ pour tout x . Si H est strictement convexe, $\vec{\mathbf{L}}$ est injectif.

Cette écriture sous forme de forme quadratique permet par exemple d'utiliser lorsque cela est possible le théorème de LAX-MILGRAM pour inverser $\vec{\mathbf{L}}$. Notons que l'on retrouve au passage une formule¹² bien connue en géométrie lorsque \mathbb{R}^n est remplacé par une variété riemannienne :

$$\langle |\mathbf{rot} \alpha|^2 \rangle_\mu + \langle (\mathbf{div} \alpha - \alpha \cdot \nabla H)^2 \rangle_\mu = \sum_{i=1}^n \langle |\nabla(\alpha_i)|^2 \rangle_\mu + \langle \alpha \cdot \nabla^2 H \alpha \rangle_\mu.$$

Lorsqu'il existe une constante $\rho > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 H(x) \geq \rho \mathbf{I}_n$ au sens des matrices symétriques, alors $-\vec{\mathbf{L}} \geq \nabla^2 H \geq \rho \mathbf{Id}$ au sens des opérateurs symétriques sur $\mathcal{D}_2(\vec{\mathbf{L}})$, et $\vec{\mathbf{L}}$ est injectif. De plus, sa plus petite valeur propre $\vec{\lambda}$ est alors supérieure à ρ . On obtient donc dans ce cas au sens des opérateurs symétriques :

$$-\vec{\mathbf{L}}^{-1} \leq (\nabla^2 H)^{-1} \leq \frac{1}{\rho} \mathbf{Id}.$$

Pour un champ de vecteurs $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on a :

$$\left\langle (-\vec{\mathbf{L}} \alpha) \cdot \alpha \right\rangle_\mu = \left\langle (\mathbf{div} \alpha - \alpha \cdot \nabla H)^2 \right\rangle_\mu$$

si et seulement si $\mathbf{rot} \alpha = 0$, ce qui revient à dire d'après le théorème de POINCARÉ que $\alpha = \nabla f$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et on a alors :

$$\left\langle (-\vec{\mathbf{L}} \alpha) \cdot \alpha \right\rangle_\mu = \langle \mathbf{I}_2 f \rangle_\mu = \langle (\mathbf{L}f)^2 \rangle_\mu.$$

Ainsi, lorsque \mathbf{L} possède un trou spectral $\lambda > 0$, alors on a :

$$-\vec{\mathbf{L}} \geq \frac{1}{\lambda} \mathbf{Id}$$

¹²Dite de BOCHNER-LICHNEROWICZ-WEITZENBOCH.

au sens des opérateurs symétriques sur le sous espace vectoriel de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}^n)$ constitué des gradients de fonctions lisses à support compact. Cependant, comme nous l'avons évoqué plus haut, la plus petite valeur propre de $\vec{\mathbf{L}}$ sur $\mathcal{D}_2(\vec{\mathbf{L}})$ est a priori plus petite que le trou spectral de \mathbf{L} , au moins pour $\nabla^2 H \geq \rho \mathbf{I}_n$.

Notons que l'opérateur $\vec{\mathbf{L}}$ conserve la fermeture : si α est un champ de vecteurs qui s'écrit $\alpha = \nabla f$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, alors le champ de vecteurs $\vec{\mathbf{L}}\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ s'écrit également comme le gradient de la fonction $g := \mathbf{L}f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, cf. formule (4) :

$$\vec{\mathbf{L}}\alpha = \mathbf{L}\nabla f - \nabla^2 H \nabla f = \nabla \mathbf{L}f =: \nabla g.$$

Réciproquement, si $\vec{\mathbf{L}}\alpha = \nabla g$ pour une fonction $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, alors il existe une unique fonction centrée $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\mathbf{L}f = g - \mathbf{E}_\mu(g)$, et on a donc $\vec{\mathbf{L}}\alpha = \vec{\mathbf{L}}\nabla f$, ce qui donne $\alpha = \nabla f$ lorsque $\vec{\mathbf{L}}$ est injectif.

Remarque C.1. Soit $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n \{1, \dots, n\}, \mu \otimes \sigma, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n \{1, \dots, n\}$ dans \mathbb{R} et de carré intégrable pour la mesure positive $\mu \otimes \sigma$ où σ est la mesure de comptage (uniforme) sur $\{1, \dots, n\}$. L'application linéaire

$$\mathbb{T} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n \{1, \dots, n\}, \mu \otimes \sigma, \mathbb{R}),$$

définie par $(\mathbb{T}(\alpha))(x, i) := \alpha_i(x)$ est une isométrie qui permet d'identifier ces deux espaces. Ainsi, un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n peut être vu comme une application à valeurs réelles mais définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \{1, \dots, n\}$. L'opérateur $\vec{\mathbf{L}}$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu, \mathbb{R}^n)$ se mue alors en un opérateur \mathbb{L} sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n \{1, \dots, n\}, \mu \otimes \sigma, \mathbb{R})$. En général, \mathbb{L} n'est pas markovien car

$$(\mathbb{L}1)_i = \sum_j \partial_{i,j}^2 H,$$

et les lignes de $\nabla^2 H$ n'ont aucune raison d'être de somme nulle. Si l'on définit $\vec{\mathbf{\Gamma}}$ pour \mathbb{L} de la même manière que $\mathbf{\Gamma}$ pour \mathbf{L} , on trouve :

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{\Gamma}}\alpha)_i &= \mathbf{\Gamma}(\alpha_i) + \alpha_i \sum_j \partial_{i,j}^2 H \alpha_j - \sum_j \partial_{i,j}^2 H \alpha_j^2 \\ &= \mathbf{\Gamma}(\alpha_i) - \sum_j \partial_{i,j}^2 H (\alpha_j - \alpha_i)^2 + \alpha_i^2 \sum_j \partial_{i,j}^2 H. \end{aligned}$$

Supposons à présent que H est convexe, et que les éléments hors diagonaux de $\nabla^2 H$ sont négatifs (en particulier, H satisfait aux hypothèses F.K.G.). Supposons également que les lignes de $\nabla^2 H$ sont de somme nulle (i.e. le vecteur 1 est dans le noyau de $\nabla^2 H$). On a alors dans ce cas $\mathbb{L}1 = 0$ et :

$$(\vec{\mathbf{\Gamma}}\alpha)_i = \mathbf{\Gamma}(\alpha_i) + \sum_{j \neq i} (-\partial_{i,j}^2 H) (\alpha_j - \alpha_i)^2 \geq 0.$$

Le générateur \mathbb{L} est donc markovien. Il est clair que l'on ne peut pas avoir à la fois H strictement convexe et \mathbb{L} markovien, et en général, μ n'est pas normalisable en une probabilité lorsque \mathbb{L} est markovien. C'est en particulier le cas lorsque H est de la forme suivante :

$$H(x) = \sum_{\{i,j\} \subset \{1, \dots, n\}} V_{\{i,j\}}(x_i - x_j),$$

où les $V_{\{i,j\}}$ sont paires, convexes et dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\partial_{i,j}^2 H(x) = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n V''_{\{i,k\}}(x_i - x_k) & \text{si } i = j \\ -V''_{\{i,j\}}(x_i - x_j) & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On a bien $\partial_{i,j}^2 H(x) \leq 0$ pour $i \neq j$ et les lignes de $\nabla^2 H(x)$ sont de somme nulle. Enfin, le théorème de GERSHGORIN-HADAMARD permet de voir que $\nabla^2 H \geq 0$ au sens des matrices symétriques et donc H est convexe. Cependant, pour tout x , $\nabla^2 H(x) \mathbf{1} = 0$ et H n'est donc pas strictement convexe. Lorsqu'il existe une matrice symétrique constante A à entrées positives telle que $V''_{\{i,j\}}(u) \geq A_{i,j}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on se ramène au cas gaussien en considérant les fonctions convexes $V''_{\{i,j\}}(u) - A_{i,j}u^2/2$ au lieu des $V''_{\{i,j\}}(u)$. On obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, au sens des matrices symétriques :

$$\nabla^2 H(x) \geq \text{Diag} \left(\sum_{i=1}^n A_{1,i}, \dots, \sum_{i=1}^n A_{n,i} \right) - A.$$

Lorsque les $A = \alpha \mathbf{1}_n$ avec $\alpha > 0$, la matrice $\nabla^2 H(x)$ est de rang 1 et son noyau, de dimension 1, contient le vecteur $\mathbf{1}$. De plus, toutes ses valeurs propres non nulles sont minorées par αn .

1. Pour $V_{\{i,j\}} = V$, on retrouve un modèle champ moyen. S'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $V''(x) > \alpha$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, alors on peut prendre $A = \alpha \mathbf{1}_n$ dans ce qui précède. La mesure μ n'est pas finie mais induit une mesure de probabilité sur l'hyperplan orthogonal au noyau, d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$, et la dynamique associée est hypercontractive. De plus, cette projection conserve l'échangeabilité. Il n'y a cependant pas de système de coordonnées canonique sur le noyau;
2. Pour $\{1, \dots, n\} \simeq \Lambda \cup \partial\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ et $V_{\{i,j\}} = \delta_{i \sim j} V$, on retrouve presque le champ quasi-gaussien aux plus proches voisins, aux conditions au bord près. Lorsqu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $V''(u) \geq \alpha$ pour $u \in \mathbb{R}$, on peut prendre $A_{i,j} = \alpha \delta_{i \sim j}$. La mesure μ n'est pas finie mais elle induit une mesure de probabilité sur le sous-espace affine des vecteurs égaux à ω pour les coordonnées dans $\partial\Lambda$. Ici, le sous-espace de projection est parallèle aux axes et le système de coordonnées ne change pas.

Dans les deux cas précédent, on peut renormaliser H en le divisant par n pour le modèle champ moyen et pas $2d$ pour le modèle aux plus proches voisins.

Remarque C.2. En fait, WITTEN introduit dans [Wit82] un laplacien un peu différent de $\vec{\mathbf{L}}$, qui lui est unitairement équivalent, cf. [Hel98b].

D Rappel sur le complexe de De Rham

À tout point d'un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n , on peut associer un réel, on parle alors de champ scalaire, ou encore un vecteur et l'on parle alors de champ de vecteurs. Il est naturel de penser que la dérivée d'un champ de scalaires est un champ de vecteurs, et que l'on peut construire un champ de « volumes » à partir de deux champs de vecteurs en prenant, en chaque point de \mathcal{O} , le produit tensoriel des deux vecteurs associés. La théorie des formes différentielles donne corps à ces idées. Le produit tensoriel de deux vecteurs n'étant rien d'autre que la surface du parallélogramme associé, il a pour norme un déterminant, et l'on comprend que les applications multilinéaires alternées vont jouer un rôle. Le lecteur familier avec le vocabulaire des formes différentielles peut passer directement à la section D.4 page 35, qui introduit le laplacien sur les formes, voire même à la section D.5 page 36 consacrée au laplacien de WITTEN associé à un potentiel H .

Dans ce qui suit, on se restreint par souci de simplicité aux formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Les notions sont bien entendu beaucoup plus générales et ramifiées. On renvoie à [Car67] pour les formes sur les espaces de BANACH, à [GHL90] pour les formes sur les variétés riemanniennes et à [Hel98b] pour les laplaciens sur les formes et leur utilisation pour représenter la covariance. Le travail de HELFFER sur la représentation de la covariance et ses conséquences a été publié dans une série d'articles parus ces dernières années [Hel98a, Hel99a, Hel99b, par exemple] et dans son cours de DEA donné à Toulouse en décembre 1998 [Hel98b]. Un certain nombre d'exemples sont traités dans [Joh00].

D.1 Formes multilinéaires alternées et produit extérieur

Une forme multilinéaire $f : (\mathbb{R}^n)^{\otimes p} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite alternée lorsque $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que $x_i = x_j$ avec $i \neq j$. Si σ est une permutation de $\{1, \dots, p\}$, de signature $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, +1\}$, on a :

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p).$$

L'ensemble \mathcal{A}_p des formes multilinéaires alternées sur \mathbb{R}^n est un sous espace fermé de l'espace des formes multilinéaires $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, c'est donc un espace de BANACH. Par convention, $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}$, et il est évident que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Le produit de deux formes multilinéaires alternées n'est pas alterné en général, et il faut donc le modifier un peu. Si $(f, g) \in \mathcal{A}_p \mathcal{A}_q$, on définit leur produit *extérieur* $f \wedge g \in \mathcal{A}_{p+q}$ par :

$$(f \wedge g)(x_1, \dots, x_{p+q}) := \sum_{\sigma \in T_{p+q}} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) g(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}),$$

où T_{p+q} est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, p+q\}$ telles que $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$. Le produit extérieur est bilinéaire et anticommutatif :

$$f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f.$$

Il est aussi associatif : $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$. On a même, pour des formes linéaires f_1, \dots, f_n (i.e. éléments de \mathcal{A}_1) :

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_n = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) f_1(x_{\sigma(1)}) \dots f_n(x_{\sigma(n)}) = \det \left((f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \right).$$

Si l'on note $x_i : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x_i \in \mathbb{R}$ la $i^{\text{ème}}$ fonction coordonnée, on a $x_i \in \mathcal{A}_1$ et tout élément f de \mathcal{A}_p s'écrit de manière unique sous la forme :

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p},$$

où $c_{i_1, \dots, i_p} \in \mathbb{R}$. Il en découle que $\mathcal{A}_p = \{0\}$ pour $p > n$. De plus, tout élément de \mathcal{A}_n s'écrit $c x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ avec $c \in \mathbb{R}$. En fait, \mathcal{A}_p a pour dimension C_n^p pour $1 \leq p \leq n$ et pour base $\{x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p}, 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$.

D.2 Formes différentielles et différentiation extérieure

Une p -forme différentielle ω sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n est une application définie sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans \mathcal{A}_p . On note Ω^p l'ensemble des p -formes différentielles $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, \mathcal{A}_p)$ (au sens de FRÉCHET sur les BANACH). Ainsi, on a $\Omega^0 \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ car $\mathcal{A}_0 \simeq \mathbb{R}$. De même, en identifiant

les formes linéaires sur \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^n lui-même par le théorème de RIESZ, il vient que Ω^1 est identifiable aux champs de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{O} .

La multiplication extérieure des applications multilinéaires alternées se généralise naturellement de façon ponctuelle aux formes différentielles. On note encore \wedge le produit extérieur qui envoie $\Omega^p \Omega^{p'}$ sur $\Omega^{p+p'}$. Si $(\omega, \omega') \in \Omega^p \Omega^{p'}$, alors : $\omega \wedge \omega' = (-1)^{pp'} \omega' \wedge \omega$. On définit $\Omega := \bigoplus_{p=0}^n \Omega^p$, sur lequel le produit extérieur \wedge est toujours bien défini. On dit que Ω est une « algèbre graduée associative et anticommutative ».

En chaque point x de $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$, la différentielle $\omega'(x)$, au sens de FRÉCHET, d'une p -forme différentielle $\omega \in \Omega^p$ est une application linéaire continue de \mathbb{R}^n dans \mathcal{A}_p . Elle n'est donc pas alternée et il faut la transformer un peu pour obtenir un élément de \mathcal{A}_{p+1} . Cela conduit à définir la différentielle extérieure $d\omega \in \Omega^{p+1}$ d'une p -forme différentielle $\omega \in \Omega^p$ par :

$$(d\omega)(x; \xi_0, \dots, \xi_p) := \sum_{i=0}^p (-1)^i \omega'(x)(\xi_i)(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_p).$$

On a donc le complexe (de DE RHAM) suivant :

$$\{0\} \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n \rightarrow \{0\}.$$

Par exemple, pour $\omega \in \Omega^0$, ω n'est rien d'autre qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$(d\omega)(x; \xi) = f'(x)(\xi) = \langle \nabla f(x), \xi \rangle.$$

La différentiation extérieure d généralise donc aux p -formes différentielles la différentielle de FRÉCHET des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On notera df la 1-forme associée à f' . Pour $\omega \in \Omega^1$, on a :

$$(d\omega)(x; \xi_1, \xi_2) = \omega'(x)(\xi_1)(\xi_2) - \omega'(x)(\xi_2)(\xi_1).$$

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\omega \in \Omega^p$, alors $f\omega \in \Omega^p$ et on a :

$$d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f d\omega.$$

Pour $(\alpha, \beta) \in \Omega^p \Omega^q$, on a :

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta).$$

On a la propriété fondamentale suivante, pour tout $\omega \in \Omega^p$:

$$d(d\omega) = 0.$$

Les fonctions coordonnées x_i , restreintes à $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, peuvent être vues comme des 0-formes différentielles. Il est facile de voir que dx_i est constante sur \mathcal{O} et vaut $y_i \in \mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ en tout point. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a : $(dx_i)(x; \xi) = \xi_i$. On démontre facilement les propriétés suivantes :

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \quad \text{et} \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

De même que pour les formes multilinéaires alternées, toute forme différentielle $\omega \in \Omega^p$ sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

où les fonctions c_{i_1, \dots, i_p} sont dans $\mathcal{C}(\mathcal{O}, \mathbb{R})$. Pour une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1$, on a pour tout $x \in \mathcal{O}$:

$$\omega(x) = c_1(x) dx_1 + \dots + c_n(x) dx_n,$$

et donc, par définition des dx_i (qui sont constantes) :

$$\omega(x; \xi) = c_1(x) \xi_1 + \dots + c_n(x) \xi_n,$$

Un champ de vecteurs $V : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{C}^∞ , peut être vu comme une 1-forme différentielle et s'écrit donc de manière canonique au point $x \in \mathbb{R}^n$:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n V_i(x) dx_i.$$

Une fonction $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ peut être vue comme une 0-forme différentielle, ou encore un champ scalaire, et on a alors :

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_i f dx_i,$$

où les $\partial_i f$ sont les dérivées partielles de FRÉCHET de f . De même, pour une 1-forme

$$\omega := c_1 dx_1 + \dots + c_n dx_n,$$

on a :

$$d\omega = \sum_{i < j} (\partial_i c_j - \partial_j c_i) dx_i \wedge dx_j.$$

Terminons par la différentielle d'une p -forme élémentaire :

$$d(c(\bullet) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = (dc) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

D.3 Théorème de Poincaré

Si l'on se donne une p -forme différentielle α sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ avec $p > 0$, il est naturel de se demander s'il existe une $(p-1)$ -forme différentielle β sur \mathcal{O} telle que $d\beta = \alpha$ (on dit alors que β est une primitive de α sur \mathcal{O}). Comme $d \circ d = 0$, une condition nécessaire est donc que $d\alpha = 0$. Le théorème de POINCARÉ affirme que si \mathcal{O} est étoilé, alors la condition $d\alpha = 0$ est suffisante. On dit qu'une p -forme ω sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ est *fermée* lorsqu'elle possède localement une primitive, i.e. tout $x_0 \in \mathcal{O}$ admet un voisinage ouvert V sur lequel ω possède une primitive.

Le cas particulier des 1-formes : il découle du théorème de POINCARÉ que pour qu'une 1-forme différentielle (un champ de vecteurs) $\omega := \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$ sur \mathbb{R}^n s'écrive comme le gradient d'une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (un champ de scalaires vu comme une 0-forme), il faut et il suffit que $d\omega = 0$, c'est-à-dire que pour tout $i < j$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial_i \omega_j(x) - \partial_j \omega_i(x) = 0.$$

Prenons par exemple $n = 3$. On a alors pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\omega(x, y, z) = X(x, y, z) dx + Y(x, x, z) dy + Z(x, x, z) dy,$$

et donc

$$(d\omega) = (\partial_y Z - \partial_z Y) dy \wedge dz + (\partial_z X - \partial_x Z) dz \wedge dx + (\partial_x Y - \partial_y X) dx \wedge dy.$$

La condition $d\omega = 0$ s'écrit alors $\mathbf{rot} \omega \equiv 0$, où $\mathbf{rot} \omega$ est le champ de vecteurs de vorticité (ou rotationnel) associé à ω , définit par :

$$\mathbf{rot} \omega := (\partial_z Y - \partial_y Z) dx + (\partial_x Z - \partial_z X) dy + (\partial_y X - \partial_x Y) dz.$$

Ceci est très particulier à la dimension 3 puisque dans ce cas \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 ont la même dimension car $C_3^1 = C_3^2 = 3$, et donc Ω^1 et Ω^2 aussi¹³. En physique, le théorème de POINCARÉ répond à une question importante :   quelle condition un champ de forces sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 découle-t-il d'un champ de potentiel ? Les exemples les plus classiques sont les champs électrostatiques et gravitationnels, qui sont à symétrie radiale.

On peut se demander à quelle condition un champ de vecteurs sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ s'écrit comme le rotationnel d'un autre champ de vecteurs sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$. Soit donc

$$\omega := A(x, y, z) dy \wedge dz + B(x, y, z) dz \wedge dx + C(x, y, z) dx \wedge dz$$

une 2-forme sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. On a sur \mathcal{O} :

$$d\omega = (\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Ainsi, le théorème de POINCARÉ entraîne, lorsque \mathcal{O} est étoilé, que ω est le rotationnel d'un champ de vecteurs si et seulement si sa divergence est indentiquement nulle :

$$\mathbf{div} \omega := \partial_x A + \partial_y B + \partial_z C \equiv 0.$$

Une C.N.S. de fermeture : L'intégrale d'une 1-forme ω sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ le long d'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{O}$ continu de classe \mathcal{C}^1 par morceaux est définie par :

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Si f est une 0-forme sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ (champ scalaire), alors :

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

et l'intégrale ne dépend pas dans ce cas du chemin suivit entre a et b . En fait, on montre que pour qu'une 1-forme ω sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ soit fermée, il faut et il suffit que pour tout x_0 de \mathcal{O} , il existe un voisinage ouvert V étoilé par rapport à x_0 tel que l'intégrale de ω le long de tout triangle dans V soit nulle. On en déduit alors qu'une 1-forme sur un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ est fermée si et seulement si $d\omega = 0$ (généralise le théorème de POINCARÉ pour les 1-formes). On introduit alors la notion d'homotopie de chemins, et l'on montre, pour une 1-forme fermée, que l'intégrale le long d'un chemin ne dépend que de ses extr mit es et que l'intégrale est constante sur chaque classe d'homotopie de chemins. Enfin, sur un ouvert \mathcal{O} simplement connexe (i.e. une seule classe d'homotopie), une 1-forme admet toujours une primitive définie à une constante additive près. Tout ceci doit sembler bien naturel à ceux qui ont fait de l'analyse complexe dans leur jeunesse.

¹³De façon générale, en dimension n , on peut identifier de façon canonique \mathcal{A}^p et \mathcal{A}^{n-p} et donc Ω^p et Ω^{n-p}

D.4 Laplacien sur les formes différentielles

La structure hilbertienne sur $\mathbf{L}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}, dx)$ induit une structure préhilbertienne sur l'algèbre graduée $\Omega := \bigoplus_{p=0}^n \Omega^p$, à partir des coefficients de la décomposition canonique des p -formes différentielles :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega} := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \langle \alpha_{i_1, \dots, i_p}, \beta_{i_1, \dots, i_p} \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, dx)}.$$

L'opérateur d admet alors un adjoint formel d^* donné par :

$$\langle \alpha, d^*(\beta) \rangle_{\Omega} = \langle d(\alpha), \beta \rangle_{\Omega},$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \Omega^{p+1} \Omega^p$ et $p \in \{0, \dots, n-1\}$. Cela définit d^* au sens des distributions, mais on peut également le voir comme le résultat d'une intégration par parties. Pour une 1-forme $\omega := \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n \in \Omega^1$, on a :

$$d^* \omega = -(\partial_1 \omega_1 + \dots + \partial_n \omega_n),$$

tandis que pour une 2-forme différentielle $\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$, on a :

$$d^* \omega = - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \omega_{ji} \right) dx_i,$$

où l'on pose $\omega_{ji} := \omega_{ij}$ pour tout $i < j$ et $\omega_{ii} := 0$. L'opérateur d^* envoie Ω^{p+1} sur Ω^p . On vérifie que $d^* \circ d^* = 0$ à partir de $d \circ d = 0$, et on a donc également un complexe :

$$\{0\} \leftarrow \Omega^0 \xleftarrow{d^*} \Omega^1 \xleftarrow{d^*} \Omega^2 \xleftarrow{d^*} \dots \xleftarrow{d^*} \Omega^n \leftarrow \{0\}.$$

Remarquons que sur les 0-formes différentielles, d s'identifie à l'opérateur ∇ alors que sur les 1-formes différentielles, d^* s'identifie à $-\text{div}$. L'opérateur laplacien usuel étant défini sur les fonctions par $\text{div} \nabla$, on entrevoit sa généralisation aux formes différentielles. Pour une forme différentielle $\omega \in \Omega$, $\mathbf{A}\omega$ est défini par :

$$\mathbf{A}\omega := (d \circ d^*)(\omega) + (d^* \circ d)(\omega) = (d + d^*)^2(\omega),$$

On note parfois $\mathbf{A}^{(p)}$ pour indiquer que l'on considère la restriction de \mathbf{A} sur Ω^p . L'opérateur $\mathbf{A}^{(p)}$ envoie Ω^p dans Ω^p . Pour une 0-forme f , on retrouve, au signe près, le laplacien usuel sur \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{A}^{(0)} f = -(\partial_{11}^2 f + \dots + \partial_{nn}^2 f) = -\Delta f.$$

Pour une 1-forme $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n \in \Omega^1$, on a :

$$\mathbf{A}^{(1)} \omega = (-\Delta \omega_1) dx_1 + \dots + (-\Delta \omega_n) dx_n,$$

On écrit parfois $\mathbf{A}^{(1)} = (-\Delta) \otimes \mathbf{I}$ car l'action est tensorisée.

Le laplacien \mathbf{A} conserve la fermeture des formes différentielles. Plus précisément, on a : $d \circ \mathbf{A} = \mathbf{A} \circ d$. Ainsi, si une 1-forme est le gradient d'un champ scalaire f , alors

$$\mathbf{A} \nabla f := \Delta \nabla f = \nabla \Delta f$$

est le gradient du champ scalaire Δf .

D.5 Laplacien de Witten sur les formes différentielles

Prenons $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, et soit $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^∞ telle que $\exp(-H)$ soit intégrable pour la mesure de LEBESGUE sur \mathbb{R}^n . On définit cette fois-ci l'opérateur d^* à partir de l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \mu)$, ce qui modifie la définition du laplacien. Ainsi, on obtient le laplacien de WITTEN :

$$\mathbf{A}_H := (d + d_H^*)^2 = d \circ d_H^* + d_H^* \circ d.$$

Pour une 0-forme f , on obtient :

$$\mathbf{A}_H^{(0)} f = \mathbf{A}^{(0)} f + \nabla H \cdot \nabla f = -\Delta f + \nabla H \cdot \nabla f,$$

alors que pour une 1-forme ω , on a :

$$\mathbf{A}_H^{(1)} \omega = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_H^{(0)} \omega_i) dx_i + \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_{ij}^2 H \omega_j \right) dx_i$$

que l'on note parfois $\mathbf{A}_H^{(1)} = \mathbf{A}_H^{(0)} \otimes \mathbf{I} + \nabla^2 H$. Si $\omega = \nabla f$ est une forme fermée, gradient d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \mathbb{R})$, on a la formule suivante :

$$\mathbf{A}_H^{(1)} \nabla f = \begin{pmatrix} \mathbf{L} \partial_1 f \\ \vdots \\ \mathbf{L} \partial_n f \end{pmatrix} + \nabla^2 H \nabla f = -(\mathbf{L} \nabla f - \nabla^2 H \nabla f) = \nabla \mathbf{L} f,$$

où $\mathbf{L} := -\mathbf{A}_H^{(0)}$. On voit donc que $\mathbf{A}_H^{(1)}$ conserve la fermeture des 1-formes puisque $\mathbf{A}_H^{(1)} \nabla f$ est le gradient de la fonction $\mathbf{L} f$.

On montre que l'opérateur $\mathbf{A}_H^{(0)}$ est un opérateur non borné positif sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \mu)$. C'est même l'unique extension auto-adjointe de l'opérateur différentiel $-\Delta$ défini $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n \mathbb{R})$. Il est diagonalisable en base orthonormée et son spectre $(\lambda_n^{(0)} \downarrow 0, n \in \mathbb{N})$, discret dénombrable, est positif avec $\lambda_0^{(0)} = 0$. De plus, son noyau est de dimension 1, et est égal à l'ensemble des fonctions constantes puisque $\mathbf{A}^{(0)} 1 = 0$. De même, on dispose d'une analyse similaire pour $\mathbf{A}^{(1)}$, dont le spectre sera noté $(\lambda_n^{(1)} \downarrow 0, n \in \mathbb{N})$. Cette fois-ci, on n'a pas forcément $\lambda_0^{(1)} = 0$, mais on peut montrer que $\lambda_0^{(1)} \leq \lambda_1^{(0)}$. Si $\lambda_0^{(1)} > 0$, on a alors au sens du produit scalaire sur Ω^1 :

$$(\mathbf{A}^{(1)})^{-1} \leq \frac{1}{\lambda_0^{(1)}} \mathbf{I}.$$

S'il existe par exemple $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 H(x) \geq \rho \mathbf{I}$, alors $\mathbf{A}^{(1)} \geq \nabla^2 H$ car $\mathbf{A}^{(0)} \otimes \mathbf{I} \geq 0$ et on montre alors qu'au sens du produit scalaire sur Ω^1 :

$$(\mathbf{A}^{(1)})^{-1} \leq (\nabla^2 H)^{-1} \leq \frac{1}{\rho} \mathbf{I}.$$

D.6 Lien avec les opérateurs de Schrödinger

Le véritable laplacien de WITTEN [Wit82] n'est pas \mathbf{A}_H mais plutôt un opérateur de SCHRÖDINGER \mathbf{B}_H , unitairement équivalent à \mathbf{A}_H . Pour le définir, on reprend la démarche suivie pour le laplacien \mathbf{A} mais en définissant \tilde{d}_H par :

$$\tilde{d}_H := \exp\left(-\frac{1}{2} H\right) d \exp\left(\frac{1}{2} H\right),$$

et \tilde{d}_H^* comme adjoint formel de \tilde{d}_H à partir du produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, dx)$. On a alors :

$$\tilde{d}_H \bullet = d \bullet + \frac{1}{2} dH \wedge \bullet.$$

On a toujours $\tilde{d}_H \circ \tilde{d}_H = 0$ et $\tilde{d}_H^* \circ \tilde{d}_H^* = 0$ et on définit le laplacien \mathbf{B}_H par :

$$\mathbf{B}_H := (\tilde{d}_H + \tilde{d}_H^*)^2 = \tilde{d}_H \circ \tilde{d}_H^* + \tilde{d}_H^* \circ \tilde{d}_H,$$

On vérifie alors que :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_H^{(0)} &= \mathbf{A}^{(0)} + \frac{1}{4} |\nabla H|^2 - \frac{1}{2} \Delta H \\ &= -\Delta + V, \end{aligned}$$

qui est un opérateur de SCHRÖDINGER de potentiel $V := \frac{1}{4} |\nabla H|^2 - \frac{1}{2} \Delta H$. On a également :

$$\mathbf{B}_H^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)} \otimes \mathbf{I} + \nabla^2 H,$$

et

$$\tilde{d}_H \circ \mathbf{B}_H^{(0)} = \mathbf{B}_H^{(1)} \circ \tilde{d}_H.$$

On peut alors utiliser l'arsenal¹⁴ développé pour les opérateurs de SCHRÖDINGER pour étudier les propriétés spectrales de l'opérateur \mathbf{A}_H .

Références

- [ABC⁺00] C. ANÉ, S. BLACHÈRE, D. CHAFAÏ, P. FOUGÈRES, I. GENTIL, F. MALRIEU, C. ROBERTO et G. SCHEFFER – *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2000.
- [BAD96] G. BEN AROUS et J.-D. DEUSCHEL – « The construction of the $(d+1)$ -dimensional Gaussian droplet », *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), no. 2, p. 467–488.
- [Bak94] D. BAKRY – « L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes », Lectures on probability theory. École d'été de probabilités de St-Flour 1992, Lecture Notes in Math., vol. 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.
- [Bas95] R. F. BASS – *Probabilistic techniques in analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Bas98] — , *Diffusions and elliptic operators*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [BD93] E. BOLTHAUSEN et J.-D. DEUSCHEL – « Critical large deviations for Gaussian fields in the phase transition regime. I », *Ann. Probab.* **21** (1993), no. 4, p. 1876–1920.
- [BDZ95] E. BOLTHAUSEN, J.-D. DEUSCHEL et O. ZEITOUNI – « Entropic repulsion of the lattice free field », *Comm. Math. Phys.* **170** (1995), no. 2, p. 417–443.
- [BDZ00] E. BOLTHAUSEN, J.-D. DEUSCHEL et O. ZEITOUNI – « Erratum: Entropic repulsion of the lattice free field. », *Commun. Math. Phys.* **209** (2000), no. 2, p. 547–548.
- [BI97] E. BOLTHAUSEN et D. IOFFE – « Harmonic crystal on the wall: a microscopic approach », *Comm. Math. Phys.* **187** (1997), no. 3, p. 523–566.

¹⁴Théorie des perturbations d'opérateurs de KATO, opérateurs de FREDHOLM,...

- [BIV00] T. BODINEAU, D. IOFFE et Y. VELENIK – « Rigorous probabilistic analysis of equilibrium crystal shapes », *J. Math. Phys.* **41** (2000), no. 3, p. 1033–1098, Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.
- [BL76] H. J. BRASCAMP et E. H. LIEB – « On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation », *J. Funct. Anal.* **22** (1976), no. 4, p. 366–389.
- [BM92] D. BAKRY et D. MICHEL – « Sur les inégalités FKG », Séminaire de Probabilités, XXVI, Springer, Berlin, 1992, p. 170–188.
- [Bol01] E. BOLTHAUSEN – « Random walk representations and entropic repulsion for gradient models », preprint, 2001.
- [Bré83] H. BRÉZIS – *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983, Théorie et applications.
- [BS02] E. BOLTHAUSEN et A.-S. SZNITMAN – *Ten lectures on random media*, DMV Seminar, vol. 32, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [Car67] H. CARTAN – *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967.
- [DD01] T. DELMOTTE et J.-D. DEUSCHEL – « On estimating the derivatives of symmetric diffusions in stationary random environment », Preprint, 2001.
- [Del97] T. DELMOTTE – « Versions discrètes de linégalité de Harnack », Thèse, Université de Cergy-Pontoise, 1997.
- [Deu96] J.-D. DEUSCHEL – « Entropic repulsion of the lattice free field. II. The 0-boundary case », *Comm. Math. Phys.* **181** (1996), no. 3, p. 647–665.
- [DG99] J.-D. DEUSCHEL et G. GIACOMIN – « Entropic repulsion for the free field: pathwise characterization in $d \geq 3$ », *Comm. Math. Phys.* **206** (1999), no. 2, p. 447–462.
- [DG00] — , « Entropic repulsion for massless fields », Preprint, 2000.
- [DGI00] J.-D. DEUSCHEL, G. GIACOMIN et D. IOFFE – « Large deviations and concentration properties for $\nabla\varphi$ interface models. », *Probab. Theor. Relat. Fields* **117** (2000), p. 49–111.
- [DV00] J.-D. DEUSCHEL et Y. VELENIK – « Non-Gaussian surface pinned by a weak potential », *Probab. Theory Related Fields* **116** (2000), no. 3, p. 359–377.
- [Fis84] M. E. FISHER – « Walks, walls, wetting, and melting. », *J. Stat. Phys.* **34** (1984), p. 667–730.
- [FS97] T. FUNAKI et H. SPOHN – « Motion by mean curvature from the Ginzburg-Landau $\nabla\varphi$ interface model. », *Commun. Math. Phys.* **185** (1997), no. 1, p. 1–36.
- [Geo88] H.-O. GEORGI – *Gibbs measures and phase transitions*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1988.
- [GHL90] S. GALLOT, D. HULIN et J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [GJ87] J. GLIMM et A. JAFFE – *Quantum physics. A functional integral point of view.*, Springer-Verlag, 1987.
- [GOS01] G. GIACOMIN, S. OLLA et H. SPOHN – « Equilibrium fluctuations for $\nabla\varphi$ interface model », Preprint, 2001.

- [Hel98a] B. HELFFER – « Remarks on decay of correlations and Witten Laplacians, Brascamp-Lieb inequalities and semiclassical limit », *J. Funct. Anal.* **155** (1998), no. 2, p. 571–586.
- [Hel98b] — , « Semi-classical analysis and statistical mechanics », Cours Post-DEA, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1998.
- [Hel99a] — , « Remarks on decay of correlations and Witten Laplacians. II. Analysis of the dependence on the interaction », *Rev. Math. Phys.* **11** (1999), no. 3, p. 321–336.
- [Hel99b] — , « Remarks on decay of correlations and Witten Laplacians. III. Application to logarithmic Sobolev inequalities », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **35** (1999), no. 4, p. 483–508.
- [HJ90] R. A. HORN et C. R. JOHNSON – *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, Corrected reprint of the 1985 original.
- [HS94] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND – « On the correlation for Kac-like models in the convex case », *J. Statist. Phys.* **74** (1994), no. 1-2, p. 349–409.
- [HS96] P. D. HISLOP et I. M. SIGAL – *Introduction to spectral theory*, Springer-Verlag, New York, 1996, With applications to Schrödinger operators.
- [IV00] D. IOFFE et Y. VELENIK – « A note on the decay of correlations under δ -pinning », *Probab. Theory Related Fields* **116** (2000), no. 3, p. 379–389.
- [Joh00] J. JOHNSEN – « On the spectral properties of Witten-Laplacians, their range projections and Brascamp-Lieb’s inequality », *Integral Equations Operator Theory* **36** (2000), no. 3, p. 288–324.
- [Kat95] T. KATO – *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [KS91] I. KARATZAS et S. E. SHREVE – *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Law91] G. F. LAWLER – *Intersections of random walks*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.
- [Mal01] F. MALRIEU – « Convergence to equilibrium for granular media equations and their Euler schemes », preprint, to appear in “Annals of Applied Probability”, 2001.
- [NS97] A. NADDAF et T. SPENCER – « On homogenization and scaling limit of some gradient perturbations of a massless free field », *Comm. Math. Phys.* **183** (1997), no. 1, p. 55–84.
- [Roy99] G. ROYER – *Une initiation aux inégalités de Sobolev logarithmiques*, Société Mathématique de France, Paris, 1999.
- [SC99] L. SALOFF-COSTE – « Some aspects of Sobolev type inequalities », Graduate course notes given at Cornell University, USA. Preprint., 1999.
- [Spi76] F. SPITZER – *Principles of random walks*, Springer-Verlag, New York, 1976, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 34.
- [Szn98] A.-S. SZNITMAN – *Brownian motion, obstacles and random media*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Wit82] E. WITTEN – « Supersymmetry and Morse theory », *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 4, p. 661–692 (1983).
- [Yos80] K. YOSIDA – *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.