Université Paul Sabatier
DEA de mathématiques appliquées
Année universitaire 1996-1997

Grandes déviations pour la mesure empirique sur un champ de Gibbs

Mémoire de DEA

Djalil **Chafaï**.
Encadré par M. **Ledoux**.

Table des matières

Introduction

Ce court mémoire est basé sur un article de Erwin **Bolthausen** et Jean-Dominique **Deuschel** paru en 1993 (voir [2] pour plus de détails).

Il traite de principes de grandes déviations pour la mesure empirique $\mathbf{R}_N$ sur le réseau $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, muni d'une mesure gaussienne P dont la covariance $\mathbf{G}$ est donnée par la fonction de Green d'une marche aléatoire irréductible sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$.

L'objectif de mon travail est de mettre au clair les démonstrations en les simplifiant éventuellement. Le texte est divisé en quatre chapitres.

De façon plus précise, on munit le réseau $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ de la topologie produit et de sa tribu borélienne. On se donne une marche aléatoire irréductible (donc transciente car $d \geq 3$) sur $\mathbb{Z}^d$ de matrice $\mathbf{Q} : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to [0,1]$ symétrique, invariante par translation, à support uniformément borné et telle que $\mathbf{Q}(0,0) = 0$. La transcience de la marche aléatoire nous permet alors de considérer sa fonction de Green $\mathbf{G} \triangleq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Q}^n$.

On définit alors la mesure gaussienne centrée P sur le réseau $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dont la covariance est précisément la fonction $\mathbf{G}$. Sous P, le réseau $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ est donc un champ gaussien centré invariant par translation de covariance $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}$ représentant l'interaction entre les composantes des ω.

On note $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$ l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ invariantes par translations et $\mathcal{M}_1^E(\Omega) \subset \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ celles d'entre elles qui sont triviales sur la tribu engendrée par les événements invariants par translation (ergodiques). Ces deux ensembles sont munis de la topologie de la convergence étroite. $\mathcal{M}_1^E(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des points extrémaux de l'ensemble convexe $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$.

On définit l'ensemble $\mathfrak{G}^E(\mathbf{Q}) \triangleq \{\gamma_m,\, m \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ des mesures de Gibbs extrémales, γ_m étant le champ gaussien de moyenne $m^{\mathbb{Z}^d}$ et de covariance $\mathbf{G}$. $\mathfrak{G}^E(\mathbf{Q})$ apparaît en fait comme l'ensemble de points extrémaux de l'ensemble convexe $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$ défini par

$$\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}) \triangleq \left\{\mu \in \mathcal{M}_1^S(\Omega) : \mu = \int_V \gamma_{\phi(x)} dx,\ \phi \in \mathbb{L}^2(V)\right\}$$

où $V \triangleq [0,1]^d$. On définit la mesure empirique $\mathbf{R}_N : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ par

$$\mathbf{R}_N \triangleq \frac{1}{|V_N|} \sum_{k\in V_N} \delta_{\theta^k(\omega_N)}$$

où $V_N = [0, N-1]^d \cap \mathbb{Z}^d$, θ est l'opérateur de translation et ω_N le prolongement périodique à tout $\mathbb{Z}^d$ de la restriction à V_N de ω. Remarquons que $|V_N| = N^d$.

Cette définition peut paraître curieuse au premier abord. La restriction au cube V_N est importante, elle rend $\mathbf{R}_N$ π_N-mesurable, π_N étant la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ sur $\mathbb{R}^{V_N}$. Les démonstrations que nous allons donner dans la suite utilisent avec profit cette localisation.

P étant dans $\mathcal{M}_1^E(\Omega)$, un théorème ergodique classique permet de montrer que l'on a P-p.s. $\lim_{N\to\infty} \mathbf{R}_N = P$ pour la topologie de $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$. Donc, pour tout ouvert $O \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ contenant P, $\lim_{N\to\infty} P(\mathbf{R}_N \notin O) = 0$.

On peut alors s'intéresser à la vitesse exponentielle de cette convergence. C'est l'objet des Principes de Grandes Déviations (PGD pour abréger).

Quand le réseau $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ est muni d'une mesure produit $\Lambda^{\otimes \mathbb{Z}^d}$, nous disposons d'un résultat classique de grandes déviations pour la mesure empirique : le théorème de Sanov. La fonction de taux y intervenant étant l'entropie relative $\mathbf{H}(\cdot|\Lambda)$.

Dans notre cas, P n'est pas une mesure produit, c'est là que réside toute la difficulté. La décroissance de la covariance $\mathbf{G}$ va donc jouer un rôle très important.

On sait (voir [5] et [10]) que si l'on remplace la covariance $\mathbf{G}$ par une covariance perturbée $\mathbf{G}^\varepsilon \triangleq (1+\varepsilon)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} (1+\varepsilon)^{-n} \mathbf{Q}^n$ à décroissance exponentielle, la mesure empirique satisfait à un N^d-PGD dont la fonction de taux est l'entropie relative spécifique $\mathbf{h}(\cdot|P^\varepsilon)$ définie par

$$\mathbf{h}(\cdot|P^\varepsilon) \triangleq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{|V_N|} \mathbf{H}_N(\cdot|P^\varepsilon)$$

où

$$\mathbf{H}_N(\mu|\nu) \triangleq \int_{\mathbb{R}^{V_N}} \log\left(\frac{d\mu_{V_N}}{d\nu_{V_N}}\right) d\mu_{V_N}.$$

Mais $\mathbf{G}$ n'a pas une décroissance exponentielle. Le comportement asymptotique de $\mathbf{G}$ est cependant connu. On a

$$|\mathbf{G}(k,0) - g(k)| = \mathcal{O}\left(|k|^{-d+1}\right)$$

où par définition

$$g(x) \triangleq \frac{\Gamma d/2}{(d-2)\pi^{d/2}} \det A^{-1/2} \frac{1}{x.A^{-1}x^{(d-2)/2}}$$

A étant la matrice symétrique positive associée à $\mathbf{Q}$:

$$|x|_A^2 \triangleq x.Ax \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (x.k)^2 \mathbf{Q}(0,k).$$

Ce comportement s'avérera suffisant pour l'établissement d'un PGD.

L'entropie spécifique relative $\mathbf{h}(\cdot|P)$ n'a pas d'ensembles de niveau compacts sur tout $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$, mais seulement sur les $\mathcal{K}_L \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}_1^S(\Omega) : \langle \omega_0^2, \mu \rangle \leq L\}$, $L > 0$. Nous montrerons dans un premier temps que sous P, $\mathbf{R}_N$ satisfait au N^d-PGD faible (la borne supérieure est restreinte au compacts) de fonction de taux $\mathbf{h}(\cdot|P)$ suivant

Pour tout ouvert $O \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ *on a*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \log P(R_N \in O) \geq -\inf_O \mathbf{h}(\cdot|P).$$

Pour tout fermé $F \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ *et tout* $L \geq 0$ *on a*

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \log P(R_N \in F) \leq -\inf_{F \cap \mathcal{K}_L} \mathbf{h}(\cdot|P).$$

La minoration fera intervenir le théorème ergodique et l'extrémalité de $\mathcal{M}_1^E(\Omega)$ pour $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$. Quand à la majoration, elle consistera à se ramener au PGD vérifié par $\mathbf{R}_N$ sous P^ε.

Ce PGD ne donne aucune information sur l'ensemble $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$, la fonction de taux $\mathbf{h}(\cdot|P)$ s'y annulant. La vitesse N^d semble donc trop élevée sur $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$. La vitesse N^d «écrase» toute l'information sur $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$. L'idée est donc de passer à une vitesse $N^{d-\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

En fait, nous verrons que si l'on remplace $|V_N| = N^d$ par N^{d-2} dans la définition de $\mathbf{h}(\cdot|P)$, nous obtenons une fonction $\mathbf{c}(\cdot|P)$

$$\mathbf{c}(\cdot|P) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \mathbf{H}_N(\cdot|P)$$

vérifiant

$$\mathbf{c}(\mu|P) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|\phi\|_{\mathbb{L}^2}^2 \, \mathcal{E}_V(1_V) & \text{si} \quad \mu = \int_V \gamma_{\phi(x)}\, dx \in \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}) \\ +\infty & \text{si} \quad \mu \notin \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}) \end{cases}$$

où

$$\mathcal{E}_V(\phi) \triangleq \inf\left\{ \| |\nabla h|_A \|_{\mathbb{L}^2}^2,\ h \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^d),\ h = \phi \text{ p.s. sur } V \right\}$$

A étant la matrice symétrique positive associée à $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{c}(\cdot|P)$ l'entropie spécifique capacitive par rapport à P. On s'attend donc à ce que sous P, $\mathbf{R}_N$ satisfasse à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux $\mathbf{c}(\cdot|P)$. Il n'en est rien. Il s'avère que l'ordre N^{d-2} est correct mais pas la fonction de taux.

Notons que pour tout $\gamma_m \in \mathfrak{G}^E(\mathbf{Q})$, on a

$$\mathbf{c}(\gamma_m|P) = \frac{m^2}{2}\mathbf{cap}_A(V) \triangleq \frac{m^2}{2}\mathcal{E}_V(1_V).$$

Un petit exemple permet de mieux comprendre ce qui se passe. Si l'on définit la moyenne empirique $\mathbf{M}_N : \Omega \to \mathbb{R}$ de la boite V_N par

$$\mathbf{M}_N(\omega) \triangleq \langle \omega_0\,,\, \mathbf{R}_N(\omega)\rangle = \frac{1}{|V_N|}\sum_{k\in V_N} \omega_k$$

alors, $\mathbf{M}_N$ étant gaussienne, on a, pour tout $m > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P(\mathbf{M}_N \geq m) = -\frac{m^2}{2\langle 1_V\,,\, K_V(1_V)\rangle_V}$$

où K_V est l'opérateur de Green sur $\mathbb{L}^2(V)$ associé à l'opérateur différentiel $\sum_{i,j=1}^d A_{i,j}\,\partial_i\partial_j$. Or pour tout $\phi \in \mathbb{L}^2(V)$, on a

$$\frac{\langle \phi\,,\, 1_V\rangle_V^2}{2\langle 1_V\,,\, K_V(1_V)\rangle_V} < \frac{\|\phi\|_V^2}{2}\mathbf{cap}_A(V)$$

$\mathbf{c}(\cdot|P)$ n'est donc pas la bonne fonction de taux. Nous verrons que la bonne fonction de taux est donnée par

$$\mathcal{C}(\mu|P) \triangleq \inf\left\{ \frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi)\,,\ \mu = \int_V \gamma_{\phi(x)} dx,\ \phi \in \mathbb{L}^2(V) \right\}.$$

On obtiendra alors le N^{d-2}-PGD fort pour $\mathbf{R}_N$ sous P de fonction de taux $\mathcal{C}(\cdot|P)$ suivant

Pour tout ouvert $O \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ on a

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P(R_N \in O) \geq -\inf_O \mathcal{C}(\cdot|P).$$

Pour tout fermé $F \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ on a

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P(R_N \in F) \leq -\inf_F \mathcal{C}(\cdot|P).$$

La preuve fera intervenir de manière cruciale le comportement de la covariance $\mathbf{G}$. La minoration se démontre de façon assez classique. En revanche, la majoration nécessitera beaucoup plus de travail. L'idée directrice étant de tirer partie de la décomposition sous P du champ ω en somme de deux champs indépendants y et ξ, le champ y ayant des covariance à décroissance exponentielle.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre définit le cadre général, les notations, rappelle quelques techniques essentielles de grandes déviations et donne quelques propriétés utiles de la covariance $\mathbf{G}$ faisant intervenir la marche aléatoire de transition $\mathbf{Q}$.

Le second chapitre est entièrement consacré au comportement polynômial N^α de l'entropie relative $\mathbf{H}_N(\cdot|P)$ quand $N \to \infty$. On y voit apparaître l'entropie spécifique relative $\mathbf{h}(\cdot|P)$ pour $\alpha = d$ et l'entropie spécifique capacitive $\mathbf{c}(\cdot|P)$ pour $\alpha = d-2$. Ces deux fonctions sont de bons candidats pour servir de fonctions de taux à des principes de grandes déviations.

Dans le troisième chapitre, on montre que la mesure empirique satisfait à un N^d-PGD faible dont la fonction de taux est l'entropie relative spécifique $\mathbf{h}(\cdot|P)$. Ce premier résultat ne donne aucune information sur le comportement de la mesure empirique dans la classe de Gibbs $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$, la fonction de taux s'y annulant. L'ordre d est trop élevé sur cet ensemble. D'autre part, on ne pourra pas lever la limitation aux sous ensembles compacts pour la majoration, les ensembles de niveau de $\mathbf{h}(\cdot|P)$ n'étant pas compacts sur tout $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$.

Le comportement en N^{d-2} de l'entropie relative $\mathbf{H}_N(\cdot|P)$ sur $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$ semble suggérer l'existence d'un N^{d-2}-PGD pour $\mathbf{R}_N$ sous P de fonction de taux $\mathbf{c}(\cdot|P)$. C'est l'objet du quatrième chapitre. Il s'avérera que $\mathbf{c}(\cdot|P)$ n'est pas la bonne fonction de taux. On montre que $\mathbf{R}_N$ satisfait à un PGD fort d'ordre N^{d-2} sur $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$. De plus, nous montrerons que sous P, $\mathbf{R}_N$ satisfait à une tension exponentielle en N^{d-2}. La nouvelle fonction de taux $\mathcal{C}(\cdot|P)$, qui est définie à partir d'une forme de Dirichlet $\mathcal{E}_V$, est infinie en dehors de la classe de Gibbs $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$. Les deux principes sont donc complémentaires.

Dans toute la suite, les théorèmes, lemmes, propositions et remarques partagent la même numérotation basée sur les chapitres. Le théorème 1.2 par exemple, figure dans le premier chapitre. Les équations sont également numérotées sur la base des chapitres, mais utilisent un autre compteur.

Chapitre 1

Définitions et notations

1.1 Cadre général

On considère le réseau $\Omega \triangleq \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ où $d \geq 3$ que l'on muni de la topologie produit et de sa tribu borélienne. Si $\omega \in \Omega$ et $k \in \mathbb{Z}^d$ on note ω_k ou $\omega(k)$ la k^{ieme} coordonnée de ω.

On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des mesures positives sur Ω et $\mathcal{M}_1(\Omega)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur Ω. On muni $\mathcal{M}(\Omega)$ de la topologie de la convergence étroite i.e. relativement à $\mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R})$.

Si $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$, on note

$$< f, \mu >= \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ on définit l'opérateur de translation θ^k par

$$\forall j \in \mathbb{Z}^d,\ \forall \omega \in \Omega\ :\ \left(\theta^j(\omega)\right)_k \triangleq \omega_{k+j}$$

On note alors $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$ l'ensemble des $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ invariantes par l'action de $\{\theta^k, k \in \mathbb{Z}^d\}$.

Si $\mathcal{T}$ désigne la tribu engendrée par l'ensemble des événement invariants par l'action du groupe $\{\theta^k, k \in \mathbb{Z}^d\}$, alors $\mu \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ est dite ergodique si elle est triviale sur $\mathcal{T}$, c'est à dire si pour tout $A \in \mathcal{T}$ on a $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

On désigne par $\mathcal{M}_1^E(\Omega)$ l'ensemble des éléments ergodiques de $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$. On a donc $\mathcal{M}_1^E(\Omega) \subset \mathcal{M}_1^S(\Omega) \subset \mathcal{M}_1(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$. En fait, $\mathcal{M}_1^E(\Omega)$ apparaît comme l'ensemble des points extrémaux du convexe $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$ de $\mathcal{M}_1(\Omega)$ (voir [8]).

Soit à présent une marche aléatoire irréductible sur $\mathbb{Z}^d$, de matrice de transition

$$\mathbf{Q} : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to [0, 1]$$

vérifiant

$$\checkmark\quad \forall i, j \in \mathbb{Z}^d \quad \mathbf{Q}(i, j) = \mathbf{Q}(j, i) = \mathbf{Q}(0, j - i) \tag{1.1a}$$

$$\checkmark\quad \mathbf{Q}(0, 0) = 0 \tag{1.1b}$$

$$\checkmark\quad \exists R > 0,\ \forall i \in \mathbb{Z}^d,\ |i| > R \Rightarrow \mathbf{Q}(0, i) = 0 \tag{1.1c}$$

Comme $d \geq 3$, $\mathbf{Q}$ est transciente et sa fonction de Green

$$\mathbf{G} \triangleq (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = (-\Delta_{\mathbf{Q}})^{-1} = \sum_{n \geq 0} \mathbf{Q}^n$$

est bien définie et finie sur $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$. On notera $\sigma^2 \triangleq \mathbf{G}(0,0)$.
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note γ_m le champs gaussien sur Ω défini par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \ <\omega_k, \gamma_m>= m \quad \text{et} \quad \forall i,j \in \mathbb{Z}^d \ cov_{\gamma_m}(\omega_i, \omega_j) = \mathbf{G}(i,j)$$

On note P le champs centré γ_0. En fait, si on pose

$$\mathfrak{G}^E(\mathbf{Q}) \triangleq \{\gamma_m : m \in \mathbb{Z}^d\}$$

et

$$\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}) \triangleq \{\gamma = \int_V \gamma_{\phi(x)} dx : \phi \in \mathbb{L}^2(V)\}$$

où $V = [0,1]^d$, alors $\mathfrak{G}^E(\mathbf{Q})$ n'est autre que l'ensemble des points extrémaux de $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$. $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$ est appelée la classe de Gibbs et $\mathfrak{G}^E(\mathbf{Q})$ la classe de Gibbs des états extrémaux (voir [8] pour plus de détails). On a

$$\mathfrak{G}^E(\mathbf{Q}) \subset \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{M}_1^S(\Omega).$$

1.2 La mesure empirique

Dans toute la suite, $\mathbf{R}_N : \Omega \to \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ désignera la mesure empirique définie par

$$\mathbf{R}_N(\omega) \triangleq \frac{1}{|V_N|} \sum_{k \in V_N} \delta_{\theta^k(\omega_N)}. \tag{1.2}$$

où $V_N := [0, N-1]^d \cap V$ et ω_N est le prolongement périodique à tout $\mathbb{Z}^d$ de la restriction à V_N de ω. Notons que $|V_N| = N^d$. Si l'on note $\pi_N : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}^{V_N}$ la projection canonique, alors $\mathbf{R}_N$ est π_N-mesurable.

On dispose d'un résultat classique sur la mesure empirique et l'ergodicité, voir [8, chapitre 14]

Théorème 1.1 (Théorème ergodique)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$, Θ un groupe de transformations mesurables préservant μ. On suppose que Θ est indexé par $\mathbb{Z}^d$. Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les événements Θ-invariants et $(\Lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de cubes de $\mathbb{Z}^d$ telle que $\lim_{n\to\infty} |\Lambda_n| \to \infty$. Soit enfin $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-mesurable et μ-intégrable alors en notant $S_n(\omega) \triangleq \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{k \in \Lambda_n} \delta_{\Theta_k(\omega)}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) \to \mathbb{E}_\mu[f|\mathcal{T}] \quad \mu-\textit{presque-sûrement.}$$

Si de plus μ est ergodique (i.e. triviale sur $\mathcal{T}$), alors $\mathbb{E}_\mu[f|\mathcal{T}] = \mathbb{E}_\mu[f]$.

Or P étant ergodique, donc en appliquant ce théorème à $\mathbf{R}_N$, on obtient que P-presque sûrement, $\lim_{N\to\infty} \mathbf{R}_N = P$ étroitement. En particulier, si on pose

$$\mathbf{L}_N = \frac{1}{|V_N|} \sum_{k \in V_N} \delta_{\omega_k}$$

on a $\mathbf{L}_N = \Phi(\mathbf{R}_N)$ où $\Phi : \mu \in \mathcal{M}_1^S(\Omega) \to \mu_0 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, μ_0 désignant la loi de ω_0 sous μ. Donc P-presque sûrement :

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{L}_N = \mathcal{N}(0,\sigma^2) \quad \text{étroitement.}$$

Revenons à $\mathbf{R}_N$; on a, pour tout ouvert O de $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$ contenant P

$$\lim_{N\to\infty} P(\mathbf{R}_N \notin O) = 1. \tag{1.3}$$

Les principes de grandes déviations que nous allons étudier donnent une idée de la vitesse exponentielle de cette convergence.

1.3 Grandes déviations : quelques outils

Définition 1.2 (Principes de grandes déviations)
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. définies sur Ω et à valeurs dans un espace topologique E. Soit $a_n \nearrow +\infty$ une suite de réels positifs. On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à un $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Principe de Grandes Déviations sur E (on dit PGD) de fonction de taux $\Phi : E \to [0,\infty]$ ssi Φ est **sci** *à ensembles de niveau compacts et pour tout $A \in \mathbb{B}(E)$ on a*

$$-\inf_{\mathring{A}} \Phi \le \liminf_{n\to\infty} a_n^{-1} \log P(U_n \in A) \le \limsup_{n\to\infty} a_n^{-1} \log P(U_n \in A) \le -\inf_{\bar{A}} \Phi. \tag{1.4}$$

On dira que le PGD est faible si la majoration n'a lieu que pour des A relativement compacts.

Remarque 1.3
Il est clair qu'on peut se restreindre par inclusion aux ouverts pour la minoration et aux fermés (compacts si PGD faible) pour la majoration.

Il est intéressant de savoir comment passer d'un PGD faible à un PGD. On dispose pour cela d'un théorème très utile faisant appel à la notion de tension exponentielle.

Définition 1.4 (Tension exponentielle)
On conserve les notations de la définition précédente, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite exponentiellement tendue ssi

$$\inf_{K \text{ compact de } E} \limsup_{n\to\infty} a_n^{-1} \log P(U_n \notin K) = -\infty. \tag{1.5}$$

Avant d'aller plus loin, voici un tout petit lemme très utile dans toute la suite.

Lemme 1.5
Soit N un naturel et $(r_\varepsilon^i)_{\varepsilon\ge 0, 1\le i\le N}$ des réels positifs. Alors

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log\left(\sum_{i=1}^N r_\varepsilon^i\right) = \max_{i=1}^N \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log r_\varepsilon^i.$$

Preuve

On a

$$0 \leq \varepsilon \log \sum_{i=1}^{N} r_\varepsilon^i - \max_{i=1}^{N} \varepsilon \log r_\varepsilon^i \leq \varepsilon \log N.$$

N étant fixé d'avance, on a donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log N = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\varepsilon \to 0} \max_{i=1}^{N} \varepsilon \log r_\varepsilon^i = \max_{i=1}^{N} \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log r_\varepsilon^i.$$

■

Nous sommes à présent en mesure de donner le théorème permettant de déduire un PGD d'un PGD faible grâce à la notion de tension exponentielle.

Théorème 1.6
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace topologique E satisfaisant à un $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$-PGD faible de fonction de taux Φ. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exponentiellement tendue, alors elle satisfait à un $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$-PGD de même fonction de taux.

Preuve

Soit F un fermé de E. La tension exponentielle nous assure l'existence d'une suite $(\mathcal{K}_L)_{L\geq 0}$ de compacts de E telle que

$$\lim_{L\to\infty} k_L \triangleq \lim_{L\to\infty} \limsup_{n\to\infty} a_n^{-1} \log P\left(U_n \notin \mathcal{K}_L\right) = -\infty.$$

On a $P\left(U_n \in F\right) \leq P\left(U_n \in F \cap \mathcal{K}_L\right) + P\left(U_n \in {\mathcal{K}_L}^c\right)$, le lemme 1.5 nous donne alors

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{-1} \log P\left(U_n \in F\right) \leq -\lim_{L\to\infty} \min\{\inf_{F\cap\mathcal{K}_L} \Phi \ , \ k_L\} \leq \lim_{L\to\infty} -\inf_{F\cap\mathcal{K}_L} \Phi \leq -\inf_F \Phi.$$

■

Une autre démarche très courante est de déduire, d'un PGD, un PGD sur un autre espace topologique. C'est l'objet des principes de contraction. Il en existe plusieurs, voir [4, page 110]. En voici un[1].

Théorème 1.7 (Principe de contraction)
Soit E et F deux espaces topologiques séparés et $f : E \to F$ une fonction continue. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans E satisfaisant à un $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$-PGD de fonction de taux Φ. Alors $(f \circ U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à un $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$-PGD de fonction de taux $\Psi(.) \triangleq \inf\{\Phi(x) : f(x) = \ .\}$.

Preuve

Φ étant **sci** à ensembles de niveau compacts, c'est aussi le cas de Ψ. En effet, pour tout $y \in F$, la continuité de f nous donne l'existence d'un x_y tel que $\Psi(y) = \inf\{\Phi(x) \ : \ f(x) = y\} = \Phi(x_y)$. Donc $\{y \in F \ : \ \Psi(y) \leq \alpha\} = f\left(\{x \ : \ \Psi(x) \leq \alpha\}\right)$ qui est compact comme image d'un compact par f.

D'autre part, on a $\inf_A \Psi = \inf_{f^{-1}(A)} \phi$, f étant continue, $f^{-1}(A)$ et A sont de même nature (ouverts ou fermés). Le PGD satisfait par $(f \circ U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en découle.

■

1. Il existe un principe de contraction inverse, il requiert de la tension exponentielle, voir [4, page 111]

Enfin, pour finir, voici un théorème très utile pour démontrer la partie majoration des PGD (il est souvent combiné à de la tension exponentielle). Il fait intervenir une «log-Laplace limite », ce qui rappelle fortement le théorème de Cramer dans $\mathbb{R}^n$. Pour une preuve, voir [4, page 131] ou encore [6, page 53].

Soit E un espace vectoriel topologique réel séparé et E^* son dual topologique. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans E et $a_n \nearrow +\infty$ une suite de réels positifs. On note $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les mesures images des $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On défini $\Lambda_{\mu_n} : E^* \to]-\infty, +\infty]$ par

$$\Lambda_{\mu_n}(\lambda) \triangleq \log \mathbb{E}\left[\exp\left(<\lambda, U_n>\right)\right] = \int_{E^*} \exp\left(\lambda(x)\right) \mu_n(dx).$$

On suppose que pour tout $\lambda \in E^*$, la limite

$$\Lambda(\lambda) \triangleq \lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \Lambda_{\mu_n}(a_n \lambda)$$

existe dans $]-\infty, +\infty]$. On défini alors la transformée $\Lambda^* : E \to [-\infty, +\infty]$ de Fenchel-Legendre de Λ par

$$\Lambda^*(x) \triangleq \sup_{E^*}\{<.,x> -\Lambda(.)\}.$$

Théorème 1.8 (Méthode de la transformée de Laplace)
Λ est convexe sur E^* et Λ^* est **sci** *convexe à valeurs dans $[0, +\infty]$. De plus, pour tout compact $K \subset E$, on a*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{-1} \log \mu_n(K) \le -\inf_K \Lambda^*(x).$$

Nous avons fait le tour des principales notions que nous allons utiliser dans la suite pour démontrer des principes de grandes déviations pour la mesure empirique $\mathbf{R}_N$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ sous P.

Avant de clore ce chapitre, intéressons nous à la covariance $\mathbf{G}$.

1.4 Quelques propriétés de la covariance G

Voici un petit lemme que l'on appliquera avec profit à $\mathbf{G}_N$.

Lemme 1.9
Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ une loi gaussienne centrée de matrice de covariance Γ. Alors pour tout $t \ge 0$ on a

$$\mu\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \ge Tr(\Gamma) + t\right) \le \exp\left[-\frac{1}{8}\min\left(\frac{t}{\bar{\Gamma}}, \frac{t^2}{Tr(\Gamma^2)}\right)\right]$$

où $\bar{\Gamma} \triangleq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |\Gamma(i,j)|$.

Preuve

Notons $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n \ge 0$ les valeurs propres de Γ. Remarquons[2] que l'on a $\lambda_1 \le \bar{\Gamma}$.

2. Théorème de Guerschgorin par exemple.

Soit donc a vérifiant $0 < a < \lambda_1^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\log \mathbb{E}^P \left[\exp \left(\frac{a}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right] &= \log \prod_{i=1}^n (1 - a\lambda_i)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log (1 - a\lambda_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} (a\lambda_i)^k \\
&\leq \frac{a}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+2} (a\lambda_i)^2 (a\lambda_1)^k \\
&\leq \frac{a}{2} \mathrm{Tr}\,(\Gamma) + \frac{\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)}{2\lambda_1^2} \left[-\log(1 - a\lambda_1) - a\lambda_1 \right] \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

L'inégalité de Markov nous permet alors d'écrire, pour tout a tel que $a\lambda_1 \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
P \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \mathrm{Tr}\,(\Gamma) + t \right) &= P \left(\exp \left[\frac{a}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] \geq \exp \left[\frac{a}{2} \left(\mathrm{Tr}\,(\Gamma) + t \right) \right] \right) \\
&\leq \exp \left(-\frac{a}{2} t + \frac{a^2}{2} \mathrm{Tr}\,(\Gamma^2) \right)
\end{aligned}$$

Maintenant, si $\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2) \leq t\lambda_1$, alors

$$\sup_{a \leq \frac{1}{2\lambda_1}} \left\{ \frac{at}{2} - \frac{a^2 \mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)}{2} \right\} \geq \frac{t}{4\lambda_1} - \frac{\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)}{8\lambda_1^2} \geq \frac{t}{8\lambda_1} \geq \frac{t}{8\bar{\Gamma}}$$

D'autre part, si $\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2) \geq t\lambda_1$ alors $\dfrac{t}{2\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)} \leq \dfrac{1}{2\lambda_1}$, donc on a

$$\sup_{a < \frac{1}{2\lambda_1}} \left(\frac{at}{2} - \frac{a^2 \mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)}{2} \right) = \frac{t^2}{8\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)}.$$

Le lemme 1.9 est donc prouvé.

■

Remarque 1.10
Le comportement de la covariance $\mathbf{G}$ *va jouer un rôle crucial dans les PGD que nous aborderons dans les chapitres suivants. L'idée, ici, est de modifier le champ gaussien* ω *sous* P *via une décomposition de la forme* $\omega = y + \xi$ *de façon à obtenir un champ* y *sous* P *à covariance* $\mathbf{G}^L$ *décroissant exponentiellement. Cette modification est obtenue en «soustrayant» de* ω *toute l'information sur le sous-réseau* $L.\mathbb{Z}^d$*. Cette décomposition sera essentielle pour démontrer la majoration (4.4) du* N^{d-2}*-PGD pour* $\mathbf{R}_N$ *sous* P*.*

Pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$, on note $\mathbb{P}_i$ la loi de la marche aléatoire $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}^d$ partant de i de probabilités de transition $\mathbf{Q}(i,.)$. Pour tout $L \in \mathbb{N}$, on définit le temps d'arrêt τ_L, temps d'atteinte du sous-réseau $L.\mathbb{Z}^d$, par

$$\tau_L \triangleq \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \text{ tq } \eta_k \in L.\mathbb{Z}^d \right\}.$$

On peut montrer facilement que l'on a pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{P}_i(\tau_L = \infty) = 0$. Pour tout $i, k \in \mathbb{Z}^d$, on définit la probabilité $q_i(k)$ d'atteinte du sous réseau $L.\mathbb{Z}^d$ en $L.k$ en partant de i par

$$q_i(k) \triangleq \mathbb{P}_i(\eta_{\tau_L} = L.k).$$

On a, pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$, $q_{L.i}(k) = \delta_{i,k}$. Posons enfin, pour tout i et j dans $\mathbb{Z}^d$,

$$\mathbf{G}^L(i,j) \triangleq \mathbb{E}^i\left[\sum_{k=0}^{\tau_L - 1} 1_{\{\eta_k = j\}}\right].$$

Nous allons voir que sous P, le champ gaussien $(\omega_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ admet pour tout $L \in \mathbb{N}$ une décomposition de la forme $\omega = y + \xi$ où $\xi_k \triangleq \mathbb{E}^P\left[\omega_k | \sigma\{(\omega_{L.k})_{k\in\mathbb{Z}^d}\}\right]$ et les champs $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ et $(\omega_{kL})_{k\in\mathbb{Z}^d}$ sont indépendants. De plus, ξ admet la représentation suivante

$$\xi_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} q_k(i)\,\omega_{L.i}.$$

Posons donc pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} \xi_i(\omega) &\triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} q_i(k)\,\omega_{L.k} \\ y_i(\omega) &\triangleq \omega_i - \xi_i(\omega). \end{aligned}$$

Nous disposons d'un certain nombre de résultats :

Lemme 1.11

1. *On a pour tout i, j dans $\mathbb{Z}^d$*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} q_i(k)\mathbf{G}(j, L.k) = \mathbf{G}(i,j) - \mathbf{G}^L(i,j). \tag{1.7}$$

2. *Il existe des constantes c_1, c_2 strictement positives telles que pour tout i, j dans $\mathbb{Z}^d$ et L dans $\mathbb{N}$ on ait*

$$\mathbf{G}^L(i,j) \leq c_1 \exp\left[-c_2|i-j|L^{-\frac{d}{2}}\right]. \tag{1.8}$$

3. *Pour tout i, j dans $\mathbb{Z}^d$ on a $\mathbb{E}^P[y_i y_j] = \mathbf{G}^L(i,j)$.*

4. *Les champs $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ et $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ sont indépendants.*

5. *En posant $L = \log(N)$ on a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sum_{k\in V_N} \left|\sigma - \sqrt{\mathbf{G}^L(k,k)}\right| = 0 \quad et \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sum_{k\in V_N} \mathbb{E}^P\left[\xi_k^2\right] = 0. \tag{1.9}$$

Preuve

Montrons tout d'abord (1.7). Il suffit d'utiliser la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} q_i(k)\mathbf{G}(j,L.k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_i\left(\eta_{\tau_L}=L.k\right)\mathbb{E}^{L.k}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{\eta_n=j\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^i\left[\sum_{n=\tau_L}^{\infty} 1_{\{\eta_n=j\}}\right] \\
&= \mathbf{G}(i,j)-\mathbf{G}^L(i,j)
\end{aligned}$$

(1.7) est donc acquise. Montrons (1.8). Si on considère, pour tout $j\in\mathbb{Z}^d$, le temps d'atteinte τ_j de j en partant de i alors on a pour tout $T>0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^L(i,j) &= \mathbb{E}^i\left[\sum_{n=\tau_j}^{\tau_L-1} 1_{\{\eta_n=j\}}.1_{\{\tau_j<\tau_L\}}\right] \\
&= \mathbb{P}_i\left(\tau_j<\tau_L\right)\mathbb{E}^j\left[\sum_{n=0}^{\tau_L-1} 1_{\eta_n=j}\right] \\
&\leq \mathbf{G}(0,0)\,\mathbb{P}_i\left(\tau_j<\tau_L\right) \\
&\leq \sigma^2\left[\mathbb{P}_i\left(\tau_j<L\right)+\mathbb{P}_i\left(L<\tau_L\right)\right].
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'on a

$$\mathbb{P}_i\left(\tau_L>T\right) \leq \exp\left[-\frac{cT}{L^d}\right] \tag{1.10a}$$

$$\mathbb{P}_i\left(\tau_j<T\right) \leq c_1\exp\left[-\frac{c_2|i-j|^2}{T}\right] \quad \text{pour } T\geq|i-j| \tag{1.10b}$$

c étant une constante strictement positive. On obtiendra le résultat cherché (1.8) en prenant $T=|i-j|\sqrt{L^d}$ dans (1.10a) et (1.10b).

Démontrons (1.10b). On a, d'après le principe de réflexion,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i\left(\tau_j<T\right) &\leq \mathbb{P}_0\left(\sup_{0\leq n\leq T}|\eta_n|\geq|i-j|\right) \\
&\leq 2\,\mathbb{P}_0\left(\left|\eta_{[T]}\right|\geq\frac{|i-j|}{2}\right).
\end{aligned}$$

L'inégalité (1.10b) en découle dès que $T\geq|i-j|$, les η_n étant des sommes de variables aléatoires indépendantes de même loi. Démontrons maintenant (1.10a). D'après le théorème de la limite centrale local, voir [13], pour tout i, il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $L\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_i\left(\eta_n\in L.\mathbb{Z}^d\right) \geq \tfrac{c}{L^d} \qquad \text{pour } n\geq L^2 \tag{1.11a}$$

$$\mathbb{P}_i\left(\eta_n\in L.\mathbb{Z}^d\right) \geq c\min\{1,n^{-\frac{d}{2}}\} \quad \text{pour } n\leq 2L^2 \tag{1.11b}$$

Pour tout i, on obtient, grâce à (1.11a) et (1.11b), en sommant sur n de L^2 à $2L^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{c}{L^{d-2}} &\leq \sum_{n=L^2}^{2L^2} \mathbb{P}_i\left(\eta_n \in L.\mathbb{Z}^d\right) \\
&\leq \mathbb{E}^i\left[\sum_{n=0}^{2L^2} 1_{\{\eta_n \in L.\mathbb{Z}^d\}}\right] \\
&\leq \mathbb{P}_i\left(\tau_L \leq 2L^2\right) \underbrace{\mathbb{E}^0\left[\sum_{n=0}^{2L^2} 1_{\{\eta_n \in L.\mathbb{Z}^d\}}\right]}_{\text{indép. de}\, i} \\
&\leq \tilde{c}\, \mathbb{P}_i\left(\tau_L \leq 2L^2\right).
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}_i\left(\tau_L \leq 2L^2\right) \geq \frac{c}{L^{d-2}}$. Le théorème de renouvellement, voir [13], nous permet alors d'écrire pour tout k

$$\mathbb{P}_i\left(\tau_L > 2kL^2\right) \leq \left(1 - \frac{c}{L^{d-2}}\right)^k \leq \exp\left[-\frac{ck}{L^{d-2}}\right].$$

Ce qui mène à (1.10a) en prenant $k < \frac{T}{2L}$. (1.8) est donc démontrée. Montrons que pour tout i, j dans $\mathbb{Z}^d$ on a $\mathbb{E}^P\left[y_i y_j\right] = \mathbf{G}^L(i,j)$. En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^P\left[y_i.y_j\right] &= \mathbb{E}^P\left[\omega_i.\omega_j\right] + \mathbb{E}^P\left[\xi_i.\xi_j\right] - \mathbb{E}^P\left[\omega_i.\xi_j\right] - \mathbb{E}^P\left[\xi_i.\omega_j\right] \\
&= \mathbf{G}(i,j) + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^d} q_i(n)\, q_j(m)\, \mathbf{G}(L.n, L.m) \\
&\quad - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} q_j(k)\, \mathbf{G}(i, L.k) - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} q_i(k)\, \mathbf{G}(L.k, j).
\end{aligned}$$

En utilisant (1.7), on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^P\left[y_i.y_j\right] &= \mathbf{G}(i,j) + \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} q_i(n)\left[\mathbf{G}(j, L.n) - \mathbf{G}^L(j, L.n)\right] \\
&\quad -\mathbf{G}(j,i) + \mathbf{G}^L(j,i) - \mathbf{G}(i,j) + \mathbf{G}^L(i,j) \\
&= \mathbf{G}(i,j) + \mathbf{G}(i,j) - \mathbf{G}^L(i,j) \\
&\quad -\mathbf{G}(j,i) + \mathbf{G}^L(j,i) - \mathbf{G}(i,j) + \mathbf{G}^L(i,j) \\
&= \mathbf{G}^L(i,j).
\end{aligned}$$

Les champs y et ξ sont gaussiens centrés sous P et leur somme ω est encore un champ gaussien. Leur non corrélation est donc équivalente à leur indépendance. Or on a pour tout $i, j \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}^P\left[y_i.\xi_{L.k}\right] = \mathbf{G}(i, L.k) - \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} q_i(j)\, \mathbf{G}(L.j, L, k).$$

On conclut en utilisant (1.7). Reste à démontrer à présent (1.9). D'après le (1.7), on a

$$\mathbb{E}^P\left[\xi_k^2\right] = \mathbf{G}(k,k) - \mathbf{G}^L(k,k) = \mathbb{E}^k\left[\sum_{n=\tau_L}^{\infty} 1_{\{\eta_n=k\}}\right].$$

Le lemme 1.11 est donc démontré.

■

Enfin, pour finir, voici un petit lemme utile

Lemme 1.12
Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et $P\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ une mesure gaussienne centrée de covariance Γ. On a alors

$$\mathbb{E}^P\left[\exp\left(f-\mathbb{E}^P[f]\right)\right] \leq \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\delta_i(f)\,\delta_j(f)\,|\Gamma_{i,j}|\right]$$

où, par définition, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$

$$\delta_i \triangleq \sup_{x_j=y_j,\,j\neq i}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x_i-y_i|}\right\}.$$

Preuve

Par convergence uniforme, on peut se restreindre au cas où $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. f est donc à gradient borné. Le théorème des accroissements finis nous donne alors pour tout i

$$\delta_i(f) = \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\infty.$$

Posons $A\triangleq\sqrt{\Gamma}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $\Phi(x)\triangleq f(A.x)$. Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^n$. On note $(P_t)_{t\in[0,1]}$ le semi-groupe associé $P_t(f)(x)\triangleq\mathbb{E}[f(x+B_t)]$. On a donc $\mathbb{E}[\Phi(B_1)]=\mathbb{E}^P[f]$.

Pour tout t et x, la fonction $g(t,x)\triangleq P_{1-t}$ vérifie

$$\begin{aligned}
\Delta_x g(t,x) &= \Delta_x\left(P_{1-t}(\Phi)\right)(x)\\
\nabla_x g(t,x) &= \nabla_x\left(P_{1-t}(\Phi)\right)(x) = P_{1-t}(\nabla\Phi)(x)\\
\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) &= -\frac{1}{2}\Delta_x\left(P_{1-t}(\Phi)\right)(x)
\end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô au processus $((s,B_s))_{s\in[0,1]}$ et à la fonction g, on obtient

$$\begin{aligned}
g(1,B_1)-g(0,B_0) &= \int_0^1\frac{\partial g}{\partial t}(s,B_s)\,ds + \int_0^1\nabla g(s,B_s).dB_s + \frac{1}{2}\int_0^1\Delta_x g(s,B_s)\,ds\\
&= \int_0^1 P_{1-t}(\nabla\Phi)(B_s)\,ds.
\end{aligned}$$

Or $g(1,B_1)=P_0(B_1)=\Phi(B_1)$, $P_0=Id$, et $g(0,B_0)=P_1(B_0)=\mathbb{E}[\Phi(B_1)]$ donc

$$\psi(B_1) = \mathbb{E}[\Phi(B_1)] + \int_0^1 P_{1-t}(\nabla\Phi)(B_s)\,dB_s.$$

Or l'exponentielle de Doléans $Y_t \triangleq \mathcal{E}\left(\int_0^1 P_{1-t}\left(\nabla\Phi\right)\left(B_s\right)dB_s\right)$ est une martingale continue donc $\mathbb{E}\left[Y_1\right]=\mathbb{E}\left[Y_0\right]=1$. On a donc

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^1 P_{1-s}\left(\nabla\Phi\right)\left(B_s\right)dB_s-\frac{1}{2}\int_0^1\left|P_{1-s}\left(\nabla\Phi\right)\left(B_s\right)\right|^2ds\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\Phi\left(B_1\right)-\mathbb{E}\left[\Phi\left(B_1\right)\right]\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\left|P_{1-s}\left(\nabla\Phi\right)\left(B_s\right)\right|^2ds\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\exp\left(\Phi\left(B_1\right)-\mathbb{E}\left[\Phi\left(B_1\right)\right]\right)\right].\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 P_{1-t}\left(\left|\nabla\Phi\right|^2\right)\left(B_s\right)ds\right]
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}^P\left[f-\mathbb{E}^P[f]\right]=\mathbb{E}\left[\exp\left(\Phi\left(B_1\right)-\mathbb{E}\left[\Phi\left(B_1\right)\right]\right)\right]\leq\exp\left[\frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\nabla\Phi(x)\right|^2\right]$$

or

$$\left|\nabla\Phi(x)\right|^2=\left|A.\nabla f\left(A.x\right)\right|^2=\left\langle\nabla f\left(A.x\right)\,,\,A^2.\nabla f\left(A.x\right)\right\rangle$$

donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\nabla\Phi\left(x\right)\right|^2\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\langle\nabla f(x)\,,\,\Gamma.\nabla f(x)\right\rangle$$

d'où, finalement,

$$\mathbb{E}^P\left[f-\mathbb{E}^P[f]\right]\leq\exp\left[\frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\langle\nabla f(x)\,,\,\Gamma.\nabla f(x)\right\rangle\right]\leq\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\delta_i\left(f\right)\delta_j\left(f\right)\left|\Gamma_{i,j}\right|\right]$$

ce qui achève la preuve du lemme 1.12.

■

Chapitre 2

Comportement de l'entropie relative $\mathbf{H}_N(\cdot|P)$

2.1 Entropie relative, entropie relative spécifique $\mathbf{h}(\cdot|P)$

Un résultat classique de grandes déviations, pour la mesure empirique dans le cas de mesures produit, est le théorème de Sanov, la fonction de taux étant l'entropie relative, voir [6] et [4].

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé, ν et μ des probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On appelle entropie relative de ν par rapport à μ la quantité

$$\mathbf{H}(\nu|\mu) \triangleq \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{d\nu}{d\mu} \log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu = \int_\Omega \log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\nu & \text{si} \quad \nu \ll \mu \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.1}$$

On dispose d'une formule variationnelle très utile pour l'entropie relative, qui permet de considérer cette dernière comme une transformée de Fenchel-Legendre. En conservant les notations précédentes on a :

$$\mathbf{H}(\nu|\mu) = \sup_{C_b(\Omega,\mathbb{R})} \{< .\,, \nu > - \log < \exp(.), \mu >\} \tag{2.2}$$

voir [6, page 68] pour une preuve.

Dans notre cas, toute la difficulté provient du fait que notre mesure P n'est pas une mesure produit. Cependant, le comportement de la covariance $\mathbf{G}$ va nous permettre d'obtenir des résultats. On sait déjà que si P^ε représente le champ gaussien centré de covariance

$$\mathbf{G}^\varepsilon \triangleq ((1+\varepsilon)I + \mathbf{Q})^{-1} = (1+\varepsilon)^{-1} \sum_{n\geq 0} \frac{\mathbf{Q}^n}{(1+\varepsilon)^n} \tag{2.3}$$

alors, sous P^ε, $\mathbf{R}_N$ satisfait à un N^d-PGD dont la fonction de taux est l'entropie relative spécifique $\mathbf{h}(\cdot|P^\varepsilon)$ voir [5, 10]. Cela est dû au fait que P^ε est hypercontractive car les entrées de $\mathbf{G}^\varepsilon$ ont, par définition même, une décroissance exponentielle.

Par définition on a

$$\forall \nu \in \mathcal{M}_1^S(\Omega), \quad \mathbf{h}(\nu|P^\varepsilon) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{V_N} \mathbf{H}_N(\nu|P^\varepsilon) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{V_N} \mathbf{H}(\nu_N|P_N^\varepsilon) \tag{2.4}$$

où μ_N désigne la mesure image de ω_N sous μ, c'est donc une loi sur $\mathbb{R}^{V_N}$, P_N^ε est donc gaussienne centrée de covariance $\mathbf{G}_N$.

On s'attend donc à ce que $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right)$ joue un rôle dans un éventuel principe de grandes déviations pour $\mathbf{R}_N$ sous P. Commençons tout d'abord par caractériser l'ensemble $\mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)$.

Proposition 2.1
L'entropie relative spécifique $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right) : \mathcal{M}_1^S\left(\Omega\right) \to [0,+\infty]$ *est bien définie, elle est affine et de noyau* $\mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)$. *De plus, si on pose* $\mathcal{K}_L \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}_1^S\left(\Omega\right) \ : \ <\omega_0^2, \mu> \leq L\}$ *pour tout* $L \geq 0$ *et* $\mathcal{K}_\infty \triangleq \cup_{L\geq 0}\mathcal{K}_L$ *alors* $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right) = \infty$ *sur* $\mathcal{K}_\infty^c$ *et* $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right)$ *à des ensembles de niveau compacts dans chaque* $\mathcal{K}_L$.

Preuve

Notons tout de suite que les $\mathcal{K}_L$ sont compacts. Pour l'existence et la caractérisation de l'entropie relative, voir [9].

Montrons que $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right)$ est affine. La formule variationnelle (2.2) de l'entropie relative associée au fait que l'application

$$\nu \in \mathcal{M}_1^S\left(\Omega\right) \to \nu_N \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^N)$$

est linéaire continue permet de voir que $\mathbf{H}_N\left(\cdot|P\right)$ est **sci** convexe comme supremum de fonctions **sci** affines. Donc $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right)$ est **sci** convexe comme limite de telles fonctions.

Reste à montrer la concavité de $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right)$. Pour ce faire, on utilise une petite inégalité. Soit $\alpha \in]0,1[$ et $a, b \in \mathbb{R}^+$, alors

$$(\alpha\, a + (1-\alpha\, b)\log(\alpha\, a + (1-\alpha)\, b) \geq \alpha\, a\log a + (1-\alpha)\, b\log b - \frac{|b-a|}{e}$$

Donc si $d\nu_1 = f_1\, d\mu$ et $d\nu_2 = f_2\, d\mu$ alors

$$\mathbf{H}_N\left(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2|\, \mu\right) \geq \alpha\mathbf{H}_N\left(\nu_1|\mu\right) + (1-\alpha)\mathbf{H}_N\left(\nu_2|\mu\right) - \underbrace{\int\frac{\left|f_2^N - f_1^N\right|}{e}d\mu_N}_{\leq 2/e}$$

Donc

$$\mathbf{h}\left(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2|\mu\right) \geq \alpha\mathbf{h}\left(\nu_1|\mu\right) + (1-\alpha)\mathbf{h}\left(\nu_2|\mu\right);$$

$\mathbf{h}\left(\cdot|P\right)$ est donc bien concave donc affine car convexe.

Montrons que l'on a $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right) = \infty$ sur $\mathcal{K}_\infty^c$. Soit $\nu \in \mathcal{M}_1^S\left(\Omega\right)$, si $\nu \not\ll P$, il n'y a rien à démontrer car alors $\mathbf{h}\left(\nu|P\right) = \infty$. Supposons donc que $\nu \ll P$; on a donc pour tout N, $\nu_N \ll P_N$. La formule variationnelle (2.2) appliquée à $\mathbf{H}_N\left(\nu|P\right)$ et $\mathbf{H}_1\left(\nu|P\right)$ nous donne

$$\mathbf{H}_N\left(\nu|P\right) \geq \mathbf{H}_1\left(\nu|P\right).$$

En appliquant encore la formule variationnelle (2.2) sur $\mathbb{R}$ à $P_1(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$, $\nu_1(dx) = f(x)dP_1(x)$ et à la fonction particulière $\phi_n(x) = x^2\psi_n(x)$ ou $\psi_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ est continue, nulle sur $[-n,n]^c$ et valant 1 sur $[-n,n]$, on obtient

$$\mathbf{H}\left(\nu_1|P_1\right) \geq \frac{1}{4\sigma^2}\int_{[-n,n]}x^2 d\nu_1(x) - \log\int_{[-n,n]}\frac{e^{\frac{-x^2}{4\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4\sigma^2}\int_{\mathbb{R}}x^2 d\nu_1(x) + \frac{1}{x^2}\log\frac{1}{2}$$

On a donc

$$\mathbf{H}_N(\nu|P) \geq \mathbf{H}_1(\nu|P) \geq \frac{1}{4\sigma^2}\langle\omega_0^2\,,\,\nu\rangle + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}.$$

Il est donc clair que si $\nu \in \mathcal{K}_\infty^c$, i.e. $\langle\omega_0^2\,,\,\nu\rangle = \infty$ alors $\mathbf{H}_N(\nu|P) = \infty$ pour tout N et donc $\mathbf{h}(\nu|P) = \infty$.

Enfin, il reste à montrer que $\mathbf{h}(\cdot|P)$ à des ensembles de niveau compacts. D'après [9], on a pour tout $\varepsilon \geq 0$

$$\mathbf{h}(\nu|P) = \mathbf{h}(\nu|P^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} < \omega_0^2, \nu > -\phi(\varepsilon) \tag{2.5}$$

où

$$\phi(\varepsilon) \triangleq -\frac{1}{2(2\pi)^d}\int_{]-\pi,\pi]^d} \log\left(\varepsilon\hat{g}(x)+1\right)dx \tag{2.6}$$

où $\hat{g}(x)$ est la densité spectrale de $\mathbf{G}$. La formule (2.5) prouve que $\mathbf{h}(\cdot|P)$ est à ensembles de niveau compacts sur chaque $\mathcal{K}_L$.

■

Remarque 2.2
On voit bien qu'un éventuel N^d-PGD pour $\mathbf{R}_N$ sous P avec $\mathbf{h}(\cdot|P)$ comme fonction de taux serait nécessairement restreint, pour la majoration, aux ensembles $\mathcal{K}_L$, là où $\mathbf{h}(\cdot|P)$ a des ensembles de niveaux compacts. On n'obtiendra d'ailleurs qu'un PGD faible (cf. chapitre suivant). D'autre part, un tel PGD ne fournirait aucune information sur l'ensemble $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$, $\mathbf{h}(\cdot|P)$ s'y annulant. Pour obtenir plus d'informations sur le comportement sur $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$, l'ordre N^d doit être réduit, nous allons voir que N^{d-2} est un bon choix.

2.2 Entropie spécifique capacitive $\mathbf{c}(\cdot|P)$

Le champ gaussien P n'étant pas une mesure produit, la vitesse de décroissance de sa covariance $\mathbf{G}$ va jouer un rôle crucial dans les PGD que nous allons voir.
Si A est la matrice symétrique $d \times d$ associée à $\mathbf{Q}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \quad |y|_A^2 \triangleq y.Ay = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (y.k)^2\mathbf{Q}(k,0) \tag{2.7}$$

alors, A est non singulière car $\mathbf{Q}$ est irréductible, et on dispose d'un résultat classique, voir [13]

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{\mathbf{G}(k,0)}{g(k)} = 1 \tag{2.8}$$

où par définition,

$$g(x) \triangleq \frac{\Gamma d/2}{(d-2)\pi^{d/2}} \det A^{-1/2} \frac{1}{x.A^{-1}x^{(d-2)/2}} = C_{d,A}|x|_{A^{-1}}^{d-2}. \tag{2.9}$$

C'est la fonction de Green associée à l'opérateur différentiel

$$\frac{1}{2}\Delta_A \triangleq \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\partial_{i,j}. \tag{2.10}$$

En fait on a un résultat plus fort sur le comportement de $\mathbf{G}$, voir [11],

$$|\mathbf{G}(k,0) - g(k)| = \mathcal{O}\left(|k|^{-d+1}\right). \tag{2.11}$$

Considérons l'opérateur de Green $K_V : \mathbb{L}^2(V) \to \mathbb{L}^2(V)$, où $V = [0,1]^d$ défini par

$$K_V(\phi) \triangleq g * (\phi 1_V) \tag{2.12}$$

K_V est un opérateur compact défini positif. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\searrow$ les valeurs propres de K_V associées aux vecteurs propres normalisés $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc

$$K_V(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \phi\,,\, e_n\rangle_V e_n.$$

On défini alors $\mathcal{E}_V$ par

$$\mathcal{E}_V(\phi) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \langle \phi\,,\, e_n\rangle_V^2. \tag{2.13}$$

Voici un petit lemme qui donne deux expressions variationnelles de $\mathcal{E}_V$. On note, pour tout $\phi \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^d)$

$$\|\phi\|^2_{A,\mathbb{R}^d} \triangleq \|\, |\nabla\phi|_A \,\|^2_{\mathbb{L}^2}.$$

Lemme 2.3
Pour tout $\phi \in L^2(V)$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_V(\phi) &= \sup\left\{ < f\,,\, \phi >_V - \frac{1}{2} < f\,,\, K_V(f) >_V \,,\; f \in \mathbb{L}^2(V)\right\} && (2.14a) \\ &= \inf\left\{ \frac{1}{2}\|h\|_{A,\mathbb{R}^d} \,,\; h \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^d)\,,\; h = \phi \text{ p.p. sur} V\right\}. && (2.14b) \end{aligned}$$

Remarque 2.4
Si $\|\cdot\|_A$ désigne la norme sur $\mathbb{R}^d$ associée à la matrice A provenant de G, alors on a $\mathcal{E}_V(1_V) = \mathbf{cap}_{\|\cdot\|_A}(V)$.

Preuve

La première formule est une conséquence immédiate du théorème de décomposition spectrale. On maximise une forme quadratique définie négative (donc concave) sur $L^2(V)$. On a donc un maximum local unique qui est atteint au point annulant la différentielle.

La seconde formule est plus technique, il faut régulariser. Posons, pour tout $\phi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$

$$\tilde{\mathcal{E}_V}(\phi) \triangleq \inf\left\{ \frac{1}{2}\|h\|_{A,\mathbb{R}^d} \text{ tq } h \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^d),\; h = \phi \text{ p.s. sur } V\right\}$$

On doit donc montrer que $\tilde{\mathcal{E}_V} = \mathcal{E}_V$. Il est clair que l'on a $\tilde{\mathcal{E}_V} \geq \mathcal{E}_V$ car pour tout $f \in \mathbb{L}^2(V)$ et $h \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle f\,,\, h\rangle - \frac{1}{2}\langle f\,,\, K_V(f)\rangle \quad \leq \quad \frac{1}{2}\|h\|_{A,\mathbb{R}^d}.$$

Reste à montrer que l'on a $\tilde{\mathcal{E}_V} \leq \mathcal{E}_V$. Soit donc $\phi \in \mathbb{H}^1(\overset{\circ}{V})$. D'après [1, théorème 3.18], il existe une suite $\phi_n \in \mathcal{C}^\infty(V)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_{A,\overset{\circ}{V}} = 0.$$

Posons, pour tout n, $C_n \triangleq [\delta_n, 1-\delta_n]^d$ où $\delta_n \searrow 0$. Il existe une unique $\psi_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, nulle à l'infini, vérifiant $\Delta_A \psi_n = 0$ sur le complémentaire de C_n et telle que $\psi_n = \phi_n$ sur C_n. ψ_n n'est donc rien d'autre que le prolongement A-harmonique à tout $\mathbb{R}^d$ de la restriction de ϕ_n à C_n. On peut choisir δ_n de telle sorte que $\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \psi_n\|_{A,\overset{\circ}{V}}$.

Pour tout n, soit $\tau_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, nulle à l'infini, telle que $\tau_n = \psi_n$ sur le complémentaire de V et $\lim_{n\to\infty} \|\tau_n - \psi_n\|_{A,\overset{\circ}{V}} = 0$. Posons alors $f_n \triangleq \Delta_A \tau_n$. f_n est nulle en dehors de V car τ_n est A-harmonique en dehors de V. On a donc

$$\langle f_n \, , \, \tau_n\rangle_V - \frac{1}{2}\langle f_n \, , \, K_V(f_n)\rangle_V \quad = \quad \langle f_n \, , \, \tau_n\rangle - \frac{1}{2}\langle f_n \, , \, K_V(f_n)\rangle \quad = \quad \frac{1}{2}\|\tau_n\|^2_{A,V}.$$

Donc

$$|\langle f_n \, , \, \phi - \tau_n\rangle_V| \quad = \quad |\langle \nabla_A \tau_n \, , \, \nabla_A(\phi - \tau_n)\rangle| \quad \leq \quad \|\tau_n\|_{A,\mathbb{R}^d}.\|\phi - \tau_n\|_{A,\mathbb{R}^d} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\langle f_n \, , \, \phi\rangle_V - \frac{1}{2}\langle f_n \, , \, K_V(f_n)\rangle_V\right] \quad \geq \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|\tau_n\|^2_{A,\mathbb{R}^d}.$$

D'où $\mathcal{E}_V(\phi) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|\tau_n\|^2_{A,\mathbb{R}^d}$. Or d'après [1, Théorème 4.32], il existe un prolongement continu $\Lambda : \mathbb{H}^1(\overset{\circ}{V}) \to \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^d)$. Donc $h_n \triangleq \tau_n + \Lambda\left[(\phi - \tau_n)\,|_{\overset{\circ}{V}}\right]$ est un prolongement à $\mathbb{R}^d$ de ϕ vérifiant

$$\|h_n\|_{A,\mathbb{R}^d} \quad \leq \quad \|\tau_n\|_{A,\mathbb{R}^d} + \|\Lambda\|.\|\phi - \tau_n\|_{A,\overset{\circ}{V}}.$$

D'où finalement,

$$\mathcal{E}_V(\phi) \quad \geq \quad \limsup_{n\to\infty} \|h_n\|_{A,\mathbb{R}^d} \quad \geq \quad \tilde{\mathcal{E}_V}(\phi).$$

Ce qui achève la preuve.

∎

Le lemme suivant va enfin faire apparaître la vitesse N^{d-2}.

Lemme 2.5
Soit $\phi \in \mathcal{C}(V, \mathbb{R})$. On note, pour tout $k \in V_N$, $\phi_N(k) \triangleq \phi\left(\frac{k}{N}\right)$. Alors

$$\lim_{N\to\infty} N^{-(d+2)}\langle \phi_N \, , \, \mathbf{G}_N\phi_N\rangle_{V_N} = \langle \phi \, , \, K_V\phi\rangle_V. \tag{2.15}$$

D'autre part, si $\phi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, alors

$$\lim_{N\to\infty} N^{-(d-2)}\left\langle \phi_N \, , \, \mathbf{G}_N{}^{-1}\phi_N\right\rangle_{V_N} = \mathcal{E}_V(\phi). \tag{2.16}$$

En particulier, si γ_{ϕ_N} est une gaussienne sur $\mathbb{R}^{V_N}$ de moyenne ϕ_N et de covariance $\mathbf{G}_N$ alors

$$\lim_{N\to\infty} N^{-(d-2)}\mathbf{H}_N(\gamma_{\phi_N}|P) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi). \tag{2.17}$$

Preuve

La formule (2.8) nous permet de dire que pour $M > 1$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} N^{-(d+2)}\langle \phi_N\,,\, \mathbf{G}_N\phi_N\rangle_{V_N} &= \lim_{N\to\infty} N^{-(2d)}\big\langle \phi_N\,,\, N^{d-2}\mathbf{G}_N\phi_N\big\rangle_{V_N} \\
&= \lim_{N\to\infty} N^{-(2d)} \sum_{i,j\in V_N} \phi(k/N)N^{d-2}\mathbf{G}_N(k,j)\phi(j/N) \\
&= \lim_{N\to\infty} N^{-(2d)} \sum_{i,j\in V_N} \phi(k/N)N^{d-2}g(j-k)\frac{\mathbf{G}_N(j-k,0)}{g(j-k)}\phi(j/N) \\
&= \lim_{N\to\infty} N^{-(2d)} \sum_{i,j\in V_N, |k-j|>M} \phi(k/N)N^{d-2}g(j-k)\phi(j/N) \\
&= \lim_{N\to\infty} N^{-(2d)} \sum_{i,j\in V_N, |k-j|>M} \phi(k/N)g(\frac{j-k}{N})\phi(j/N) \\
&= \langle \phi\,,\, K_V\phi\rangle_V.
\end{aligned}$$

Voilà pour (2.15). Passons à (2.16).

On va se ramener à une forme quadratique sur $\mathbb{L}^2$ puis utiliser (2.14a) et (2.15). Soit $h \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $h = \phi$ sur V (toujours possible car ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur V borné). On note $h_N \triangleq h(./N)$ et $|\nabla_{\mathbf{Q}} h_N|^2(k) \triangleq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{Q}(j,k)(h_N(j) - h_N(k))^2$. On a, par maximisation d'une forme quadratique définie négative

$$\begin{aligned}
\big\langle \phi_N\,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}\phi_N\big\rangle_{V_N} &= 2\sup\{\langle \phi_N\,,\, f\rangle_{V_N} - \frac{1}{2}\langle f\,,\, \mathbf{G}_N f\rangle_{V_N}\ f \in L^2(V)\} \\
&= 2\sup\{\langle h_N\,,\, f\rangle_{\mathbb{Z}^d} - \frac{1}{2}\langle f\,,\, \mathbf{G}_N f\rangle_{\mathbb{Z}^d}\ f \in L^2(V_N)\} \\
&\leq 2\sup\{\langle h_N\,,\, f\rangle_{\mathbb{Z}^d} - \frac{1}{2}\langle f\,,\, \mathbf{G}_N f\rangle_{\mathbb{Z}^d}\ f \in L^2(\mathbb{Z}^d)\} \\
&= \big\langle h_N\,,\, \mathbf{G}^{-1}h_N\big\rangle_{\mathbb{Z}^d} \\
&= \frac{1}{2}\big||\nabla_{\mathbf{Q}} h_N|^2\big|_{\mathbb{Z}^d}.
\end{aligned}$$

On a obtenu une majoration, reste à établir la minoration. Le théorème de la moyenne donne

$$\limsup_{N\to\infty} N^{-(d-2)}\big\langle \phi_N\,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}\phi_N\big\rangle_{V_N} \leq \frac{1}{2}\limsup_{N\to\infty} N^{-(d-2)}\big\langle |\nabla_{\mathbf{Q}} h_N|^2\big\rangle_{\mathbb{Z}^d} = \frac{1}{2}\big\||\nabla_{\mathbf{Q}} h_N|_A\big\|^2_{\mathbb{R}^d}.$$

Mais, toujours par maximisation d'une forme quadratique, on a pour toute $f \in \mathcal{C}^1(V;\mathbb{R})$

$$N^{-(d-2)}\big\langle \phi_N\,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}\phi_N\big\rangle_{V_N} \geq 2\left(N^{-d}\langle f_N\,,\, \phi_N\rangle_{V_N} - \frac{1}{2}N^{-(d+2)}\langle f_N\,,\, \mathbf{G}_N f_N\rangle_{V_N}\right).$$

En appliquant alors (2.15) on obtient

$$\liminf_{N\to\infty} N^{-(d-2)}\big\langle \phi_N\,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}\phi_N\big\rangle_{V_N} \geq 2\left(\langle f\,,\, \phi\rangle_V - \frac{1}{2}\langle f\,,\, K_V f\rangle_V\right).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer (2.14a) en remplaçant le supremum sur $\mathbb{L}^2$ par un supremum sur $\mathcal{C}^1$, ce qui est licite car les vecteurs propres e_n de K_V sont $\mathcal{C}^1$. (2.16) est donc prouvée.

Reste à montrer (2.17). On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_N(\gamma_{\phi_N}|P) &= \int_{\mathbb{R}^{V_N}} \log\exp\left[-\frac{1}{2}\big\langle x-\phi_N\,,\,\mathbf{G}_N{}^{-1}(x-\phi_N)\big\rangle + \frac{1}{2}\big\langle x\,,\,\mathbf{G}_N{}^{-1}(x)\big\rangle\right] d\gamma_{\phi_N}(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^{V_N}} -\frac{1}{2}\left[\big\langle \phi_N\,,\,\mathbf{G}_N{}^{-1}(\phi_N)\big\rangle - 2\big\langle x\,,\,\mathbf{G}_N{}^{-1}(\phi_N)\big\rangle\right] d\gamma_{\phi_N}(x)\\
&= -\frac{1}{2}\big\langle \phi_N\,,\,\mathbf{G}_N{}^{-1}(\phi_N)\big\rangle + \big\langle \phi_N\,,\,\mathbf{G}_N{}^{-1}(\phi_N)\big\rangle d\gamma_{\phi_N}(x)\\
&= \frac{1}{2}\big\langle \phi_N\,,\,\mathbf{G}_N{}^{-1}(\phi_N)\big\rangle.
\end{aligned}$$

■

Nous sommes enfin prêts à introduire la fonction $\mathbf{c}\,(\cdot|P)$.

Théorème 2.6
L'entropie spécifique capacitive relativement à P,

$$\mathbf{c}\,(\mu|P) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}}\mathbf{H}_N\,(\mu|P) \tag{2.18}$$

est bien définie sur $\mathcal{M}_1^S\,(\Omega)$, à valeurs dans $[0,+\infty]$ et vérifie

$$\mathbf{c}\,(\mu|P) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|\phi\|_V^2\,\mathcal{E}_V\,(1_V) & si \quad \mu = \int_V \gamma_{\phi(x)}\,dx \in \mathfrak{G}^S\,(\mathbf{Q}) \\ +\infty & si \quad \mu \notin \mathfrak{G}^S\,(\mathbf{Q}) \end{cases}. \tag{2.19}$$

Preuve

Traitons d'abord rapidement le cas $\nu \notin \mathfrak{G}^S\,(\mathbf{Q})$. D'après la proposition 2.1, on a

$$\nu \in \mathfrak{G}^S\,(\mathbf{Q}) \quad \text{ssi} \quad \mathbf{h}\,(\nu|P) \triangleq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^d}\mathbf{H}_N\,(\nu|P) = 0.$$

Donc pour $\nu \notin \mathfrak{G}^S\,(\mathbf{Q})$ on a $\mathbf{h}\,(\nu|P) > 0$ donc $\mathbf{c}\,(\nu|P)$ existe et vaut $+\infty$ car

$$\frac{1}{N^{d-2}}\mathbf{H}_N\,(\nu|P) = N^2.\underbrace{N^{-d}\mathbf{H}_N\,(\nu|P)}_{\text{converge vers } \mathbf{h}(\cdot|P)>0} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty.$$

Le cas $\nu \notin \mathfrak{G}^S\,(\mathbf{Q})$ est donc traité. Passons maintenant au cas où $\nu \in \mathfrak{G}^S\,(\mathbf{Q})$. Posons

$$\bar{\mathbf{c}}\,(\nu|P) = \limsup_{N\to\infty} N^{-(d-2)}\mathbf{H}_N\,(\nu|P) \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{c}}\,(\nu|P) = \liminf_{N\to\infty} N^{-(d-2)}\mathbf{H}_N\,(\nu|P)\,.$$

On peut facilement montrer, avec la même méthode que pour $\mathbf{h}\,(\cdot|P)$ (voir la preuve de (2.1)) que $\underline{\mathbf{c}}\,(\cdot|P)$ est concave, $\bar{\mathbf{c}}\,(\cdot|P)$ est convexe et $\mathbf{c}\,(\cdot|P)$ est affine.

Supposons que $\nu = \gamma_m \in \mathfrak{G}^E\,(\mathbf{Q}) \subset \mathfrak{G}^S\,(\mathbf{Q})$. La densité ϕ associée est $\phi \equiv m1_V$. On a donc $\mathcal{E}_V\,(\phi) = m^2\mathbf{cap}_A(V)$. Le lemme 2.5 nous permet alors d'écrire

$$\underline{\mathbf{c}}\,(\gamma_m|P) = \bar{\mathbf{c}}\,(\gamma_m|P) = \frac{m}{2}\mathbf{cap}_A(V).$$

On a donc le résultat pour $\nu \in \mathfrak{G}^E(\mathbf{Q})$. Reste à aborder le cas où $\nu \in \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}) \setminus \mathfrak{G}^E(\mathbf{Q})$. Soit donc

$$\nu \triangleq \int_V \gamma_{\phi(x)} dx \in \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}) \quad \text{avec } \phi \in \mathbb{L}^2(V).$$

$\mathbf{H}_N(\cdot|P)$ étant convexe, l'inégalité de Jensen nous permet d'écrire

$$\mathbf{H}_N(\nu|P) \leq \int_V \mathbf{H}_N\left(\gamma_{\phi(x)}|P\right) dx = \int_V \mathbf{H}_N(\gamma_1|P)\,\phi^2(x)dx = \mathbf{H}_N(\gamma_1|P)\,.\|\phi\|^2_{\mathbb{L}^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{N^{d-2}}\mathbf{H}_N(\nu|P) \leq \frac{1}{N^{d-2}}\|\phi\|^2_{\mathbb{L}^2}\mathbf{H}_N(\gamma_1|P)\,.$$

Comme $\gamma_1 \in \mathfrak{G}^E(\mathbf{Q})$, le cas précédent nous donne

$$\lim_{N\to\infty} N^{-(d-2)}\mathbf{H}_N(\gamma_1|P) = \frac{1}{2}\mathbf{cap}_A(V).$$

On a donc finalement

$$\bar{\mathbf{c}}(\nu|P) \leq \frac{\|\phi\|_{\mathbb{L}^2}}{2}\mathbf{cap}_A(V). \tag{2.20}$$

Reste donc à montrer que

$$\underline{\mathbf{c}}(\nu|P) \geq \frac{\|\phi\|_{\mathbb{L}^2}}{2}\mathbf{cap}_A(V). \tag{2.21}$$

Nous allons nous ramener à l'ensemble $\mathfrak{G}^E(\mathbf{Q})$ en utilisant son extrémalité. Soit donc $V^1, \dots, V^n$ une partition finie de V. On effectue alors la décomposition suivante

$$\nu = \sum_{i=1}^n \nu^i \left|V^i\right| \qquad \text{où} \qquad \nu^i \triangleq \frac{1}{|V^i|}\int_{V^i} \gamma_{\phi(x)}\,dx.$$

On a $0 \leq |V^i| \leq |V| = 1$ et $\sum_{i=1}^n |V^i| = 1$. L'affinité de $\underline{\mathbf{c}}(\cdot|P)$ nous permet alors d'écrire

$$\underline{\mathbf{c}}(\gamma|P) = \underline{\mathbf{c}}\left(\sum_{i=1}^n \left|V^i\right|\nu^i|P\right) \geq \sum_{i=1}^n \left|V^i\right|\underline{\mathbf{c}}\left(\nu^i|P\right). \tag{2.22}$$

Il faut maintenant évaluer les $\underline{\mathbf{c}}(\nu^i|P)$, des dérivées de Radon-Nikodym vont donc tout naturellement intervenir. Posons

$$f_{m,N} \triangleq \frac{d(\gamma_m)_{V_N}}{dP_{V_N}} \quad \text{et} \quad f_N^i \triangleq \frac{d\nu^i_{V_N}}{dP_{V_N}} = \left|V^i\right|^{-1}\int_{V^i} f_{\phi(x),N}\,dx.$$

L'inégalité de Jensen appliquée à la probabilité $\dfrac{1}{|V^i|}1_{V^i}dx$ donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_N\left(\nu^i|P\right) &= \mathbb{E}^{\nu^i_N}\left(\log f_N^i\right) \\
&\geq \mathbb{E}^{\nu^i_N}\left(\left|V^i\right|^{-1}\int_{V^i}\log f_{\phi,N}\,dx\right) \\
&= \left|V^i\right|^{-1}\int_{V^i}\mathbb{E}^{\nu^i_N}\left(\log f_{\phi(x),N}\right)\,dx \qquad \text{(théorème de Fubini).}
\end{aligned}$$

Or $\log f_{\phi(x),N}(.) = -\frac{1}{2}\phi^2(x)\big\langle \mathbf{1} \,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}(\mathbf{1})\big\rangle_{V_N} + \phi(x)\big\langle \mathbf{1} \,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}(.)\big\rangle_{V_N}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_N\left(\nu^i|P\right) &\geq \big|V^i\big|^{-1}\int_{V^i}\left[-\frac{1}{2}\big\langle \mathbf{1} \,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}(\mathbf{1})\big\rangle_{V_N}\phi^2(x)\big|V^i\big|^{-1} + \phi(x)\mathbb{E}^{\nu^i_N}\left(\big\langle \mathbf{1} \,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}(.)\big\rangle_{V_N}\right)\right]dx \\
&= \big|V^i\big|^{-1}\int_{V^i}\left[-\frac{1}{2}\big\langle \mathbf{1} \,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}(\mathbf{1})\big\rangle_{V_N}\phi^2(x)\big|V^i\big|^{-1}\right]dx \\
&\quad +\big|V^i\big|^{-1}\int_{V^i}\left[\phi(x)\big|V^i\big|\big\langle \mathbf{1} \,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}(\mathbf{1})\big\rangle_{V_N}\int_{V^i}\phi(y)dy\right]dx \\
&= \big|V^i\big|^2\big\langle \mathbf{1} \,,\, \mathbf{G}_N{}^{-1}(\mathbf{1})\big\rangle_{V_N}\int_{V^i\times V^i}\left[-\frac{1}{2}\phi^2(x) + \phi(x)\phi(y)\right]dx\otimes dy.
\end{aligned}$$

Or le lemme 2.5 nous donne

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-2}}\langle \mathbf{1} \,,\, \mathbf{G}_N(\mathbf{1})\rangle_{V_N} = \mathcal{E}_V(\mathbf{1}) = \mathbf{cap}_A(V).$$

En injectant ces résultats dans (2.22) on obtient

$$\underline{\mathbf{c}}\,(\nu|P) \geq \mathbf{cap}_A(V)\left[\frac{1}{2}\|\phi\|_{\mathbb{L}^2(V)} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|V^i|}\int_{V^i\times V^i}\left[\phi(x)-\phi(y)\right]dx\otimes dy\right].$$

Or pour tout ϕ dans $\mathbb{L}^2(V)$, on a

$$\inf\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big|V^i\big|\int_{V^i\times V^i}[\phi(x)-\phi(y)] : \{V^i,\ldots,V^n\}\ \text{ partition de }\ V\Big\} = 0.$$

D'où (2.21), qui, combinée à (2.21), donne le résultat escompté.

■

Chapitre 3

Premier principe de grandes déviations

Nous allons établir un N^d-PGD faible pour la mesure empirique R_N dont la fonction de taux est $\mathbf{h}(\cdot|P)$. La minoration sera basée sur le théorème ergodique et la majoration sur le N^d-PGD de R_N sous P^ε. Rappelons que par définition

$$\forall L \geq 0,\ \mathcal{K}_L \triangleq \left\{\mu \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)\ :\ \left\langle \omega_0^2,\ ,\mu \right\rangle \leq L\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_\infty \triangleq \cup_{L\geq 0}\, \mathcal{K}_L.$$

Reppelons que les ensembles $\mathcal{K}_L$ sont compacts.

3.1 Le théorème

Théorème 3.1
Pour tout ouvert $O \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ on a

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \log P(R_N \in O) \geq -\inf_O \mathbf{h}(\cdot|P). \tag{3.1}$$

Pour tout fermé $F \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ et tout $L \geq 0$ on a

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \log P(R_N \in F) \leq -\inf_{F\cap\mathcal{K}_L} \mathbf{h}(\cdot|P). \tag{3.2}$$

Corollaire 3.2
Pour tout compact $K \subset \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ on a

$$\limsup_{N\to\infty} N^{-d} \log P(R_N \in K) \leq -\inf_K \mathbf{h}(\cdot|P).$$

Preuve du corollaire (3.2)

Les $\mathcal{K}_L$ sont compacts et on a pour tout N $P(R_N \in \mathcal{K}_\infty) = 1$ car R_N est une combinaison linéaire de masses de Dirac. Soit K un compact de $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$. On a $K = (K\cap\mathcal{K}_\infty)\cup(K\cap\mathcal{K}_\infty^c)$. De plus, il existe un $L \geq 0$ tel que $K\cap\mathcal{K}_\infty = K\cap\mathcal{K}_L$. Donc

$$P(R_N \in K) = P\underbrace{(R_N \in K\cap\mathcal{K}_\infty)}_{R_N\in K\cap\mathcal{K}_L} + \underbrace{P(R_N \in K\cap\mathcal{K}_\infty^c)}_{0}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log P(R_N \in K) &= \limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log P(R_N \in K\cap\mathcal{K}_L) \\
&\leq -\inf_{K\cap\mathcal{K}_L} \mathbf{h}(\cdot|P) \\
&\leq -\inf_K \mathbf{h}(\cdot|P).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

■

3.2 Preuve de la minoration

L'idée de la démonstration de (3.1) est d'utiliser le théorème ergodique et l'extremalité de $\mathcal{M}_1^E(\Omega)$ dans $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$. La clef de la démonstration étant l'estimation de l'entropie relative par rapport à P d'un produit tensoriel de restrictions d'éléments de $\mathcal{M}_1^E(\Omega)$.

Tout d'abord, remarquons que l'on peut se contenter de montrer que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1^S(\Omega)$, il existe un voisinage ouvert O de μ dans $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$ tel que

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \log P(R_N \in O) \geq -\mathbf{h}(\mu|P).$$

Le cas général s'en déduisant par simple minoration. Remarquons aussi que l'on peut se restreindre aux $\mu \in K_\infty$ car sinon $\mathbf{h}(\mu|P) = \infty$ et l'inégalité est triviale. D'autre part, par définition de $\mathcal{M}_1^E(\Omega)$, on peut se ramener au cas où μ s'écrit

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu^i$$

où $\mu^i \in \mathcal{M}_1^E(\Omega)$, $p_i \in]0,1[$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

On peut aussi supposer qu'il existe un $L \geq 0$ tel que pour tout i, $\mu^i \in \mathcal{K}_L$. Car sinon, il existerait un μ^{i_0} tel que $\mu^{i_0} \notin \mathcal{K}_\infty$ donc on aurait $\mu \notin \mathcal{K}_\infty$.

Soit $V^1, \ldots, V^n$ une partition de $V \triangleq [0,1]^d$ en parallélépipèdes[1] telle que pour tout i, $|V^i| = p_i$. Par exemple $V^i = [0,p_i] \times [0,1]^{d-1}$.

On pose alors $V_N^i \triangleq \{k \in \mathbb{Z}^d \ : \ \frac{k}{N} \in V^i\}$. Il est clair que $V_N^1, \ldots, V_N^n$ est une partition de V_N. Et on a $|V_N^i| \sim Np_i$.

On pose aussi $V_N^{n+1} \triangleq \mathbb{Z}^d \backslash V_N$ et $\mu^{n+1} \triangleq P$. On a donc $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} = \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{R}^{V_N^i}$. On définit la mesure

$$\nu^N \triangleq \bigotimes_{i=1}^{n+1} \mu^i_{V_N^i}$$

où $\mu^i_{V_N^i}$ désigne la mesure image de la projection canonique $\pi_N : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}^{V_N}$ sous μ^i. On a $\nu^N \in \mathcal{M}_1(\Omega)$. On n'en sait pas plus.

On va voir, grâce au théorème ergodique 1.1 page 2 que l'on a

$$\nu^N(\mathbf{R}_N \in O) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1. \tag{3.3}$$

Remarquons que l'on ne peut pas appliquer le théorème ergodique à ν^N ni a μ car elles ne sont pas forcément ergodiques. Cependant, les μ^i le sont.

$\pi_N : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}^{V_N}$ étant la projection canonique, on considère $\tilde{\mathbf{R}}_N : \mathbb{R}^{V_N} \to \mathcal{M}_1^S(\Omega)$ telle que $\mathbf{R}_N = \tilde{\mathbf{R}}_N \circ \pi_N$.

On peut supposer sans perdre de généralité que O est convexe. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit O_i un voisinage de μ^i tel que $\sum_{i=1}^n p_i O_i \subset O$. On écrit alors

$$\mathbf{R}_N(\omega) \triangleq \frac{1}{|V_N|} \sum_{k\in V_N} \delta_{\theta^k(\omega_N)} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{p_i |V_N|} \sum_{k \in V_N^i} \delta_{\theta^k \omega_N} = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{\mathbf{R}}_{V_N^i}(\omega).$$

1. Avec des cubes, ça ne marche pas, contrairement à ce que semblent prétendre les auteurs de l'article.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\nu^N\left(R_{V_N}\in O\right) &\geq \nu^N\left(\tilde{\mathbf{R}}_{V_N^i}(\omega)\in O_i\ ,\ i=1,\ldots,n\right)\\
&\geq \nu^N\left(\tilde{\mathbf{R}}_{V_N^i}(\omega|_{V_N^i})\in O_i\ ,\ i=1,\ldots,n\right)\\
&\geq \left[\prod_{i=1}^n \mu^i_{V_N^i}\left(\tilde{\mathbf{R}}_{V_N^i}(\omega|_{V_N^i})\in O_i\right)\right]\underbrace{P_{V_N^{n+1}}\left(\mathbb{R}^{V_N^{n+1}}\right)}_{=1}\\
&= \prod_{i=1}^n \mu^i\left(\mathbf{R}_{V_N^i}(\omega)\in O_i\right).
\end{aligned}$$

Or pour tout i, le théorème ergodique 1.1 donne

$$\mu^i\left(\mathbf{R}_{V_N^i}(\omega)\in O_i\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}1.$$

On a donc établi (3.3). D'après [9] [2] , on a

$$\mathbf{H}_N\left(\nu N|P\right)\leq c(n).L.N^{d-1}+\sum_{i=1}^n \mathbf{H}_{V_N^i}\left(\mu^i|P\right). \tag{3.4}$$

Nous allons utiliser (3.3) et (3.4) pour conclure. On note

$$\begin{aligned}
\nu_N &\triangleq \nu^N|_{V_N} \triangleq \bigotimes_{i=1}^n \mu^i_{V_N^i}\\
f_N &\triangleq \frac{d\nu_N}{dP_{V_N}}\\
A_N &\triangleq \left\{\tilde{\mathbf{R}}_N\in O\,;\ f_N>0\right\}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\log P\left(\mathbf{R}_N\in O\right)=\log\int_{\mathbb{R}^{V_N}}1_{\{\tilde{\mathbf{R}}_N\in O\}}dP_{V_N}\geq\log\int_{\mathbb{R}^{V_N}}1_{A_N}dP_{V_N}.$$

Tout d'abord, remarquons que d'après (3.3) on a

$$\nu_N\left(A_N\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}1. \tag{3.5}$$

Donc $\nu_N(A_N)>0$ à partir d'un certain rang sur N. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\log P\left(\mathbf{R}_N\in O\right) &\geq \log\int_{A_N}\frac{d\nu_N}{f_N}\\
&= \log\nu_N(A_N)+\log\int_{A_N}\frac{d\nu_N}{f_N\ \nu_N(A_N)}\\
&\geq \log\nu_N(A_N)+\int_{A_N}\log\left[\frac{1}{f_N}\right]\frac{d\nu_N}{\nu_N(A_N)} \qquad \text{(Inégalité de Jensen)}\\
&= \log\nu_N(A_N)-\frac{1}{\nu_N(A_N)}\int_{A_N}\log\left[f_N\right]d\nu_N.
\end{aligned}$$

2. En fait, ce résultat ne peut pas être déduit de [9] aussi facilement que les auteurs le prétendent, les V_N^i n'étant pas des cubes. Pour ma part, je ne suis pas parvenu à en établir une preuve satisfaisante.

Or $x\log x \geq -e^{-1}$ sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\int_{A_N^c} \log f_N d\nu_N = \int_{A_N^c} f_N \log f_N dP_{V_N} \geq -e^{-1} P_{V_N}(A_N^c) \geq -e^{-1}.$$

Il vient donc

$$\log P\left(\mathbf{R}_N \in O\right) \geq \log \nu_N(A_N) - \frac{1}{e\nu_N(A_N)} - \frac{1}{\nu_N(A_N)} \mathbf{H}_N\left(\nu^N | P\right).$$

Or d'après (3.5) on a $\nu_N(A_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$, d'autre part, $\mathbf{h}\left(\cdot|P\right)$ étant affine, on a, d'après (3.4)

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{|V_N|} \mathbf{H}_N\left(\nu^N|P\right) \leq \mathbf{h}\left(\mu|P\right).$$

On obtient donc

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{|V_N|} P\left(\mathbf{R}_N \in O\right) \geq \liminf_{N\to\infty} \left[\frac{\log \nu_N(A_N)}{|V_N|} - \frac{1}{|V_N| e\nu_N(A_N)}\right] - \mathbf{h}\left(\mu|P\right) = -\mathbf{h}\left(\mu|P\right).$$

La minoration (3.1) est donc prouvée.

■

3.3 Preuve de la majoration

L'idée de la démonstration de (3.2) est de se ramener au N^d-PGD sous P^ε. On sera donc amené à estimer le comportement de dérivées de Radon-Nikodym. La simple introduction de la dérivée de Radon-Nikodym de P par rapport à P^ε ne serait malheureusement pas suffisante, les deux mesures ayant des covariances trop éloignées. On introduit alors une mesure intermédiaire $P^{N,\varepsilon}$, dont la covariance $\mathbf{G}^{N,\varepsilon}$ provient d'une perturbation sur V_N de celle de P.

Soit F un fermé de $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$. Pour tout $L > 0$ on note $F_L \triangleq F \cap \mathcal{K}_L$. Soit $\varepsilon > 0$, on défini $P^{N,\varepsilon} \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ par

$$\frac{dP^{N,\varepsilon}}{dP}(\omega) \;\triangleq\; F^{N,\varepsilon}(\omega) \;\triangleq\; \frac{1}{Z^{N,\varepsilon}} \exp\left[-\frac{\varepsilon}{2}|V_N|\left\langle \omega_0^2\,,\, \mathbf{R}_N(\omega)\right\rangle\right] \;=\; \frac{1}{Z^{N,\varepsilon}} \exp\left[-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in V_N} \omega(k)^2\right].$$

Le terme de normalisation $Z^{N,\varepsilon}$ étant défini par

$$Z^{N,\varepsilon} \triangleq \mathbb{E}^P\left[\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in V_N}\omega(k)^2\right)\right] = \det\left(\varepsilon \mathbf{G}_N + \mathbf{I}_N\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui a un sens car $\varepsilon\mathbf{G}_N + \mathbf{I}_N$ est inversible pour ε assez petit. On a

$$\log Z^{N,\varepsilon} = -\frac{1}{2}\log\det\left(\varepsilon\mathbf{G}_N + \mathbf{I}_N\right).$$

Un calcul montre alors que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|V_N|} \log Z^{N,\varepsilon} = \phi(\varepsilon). \tag{3.6}$$

Voir (2.6) pour la définition de ϕ. La covariance $\mathbf{G}^{N,\varepsilon}$ de $P^{N,\varepsilon}$ est donnée par

$$\mathbf{G}^{N,\varepsilon} \triangleq \left(\varepsilon\mathbf{I}_N + \mathbf{G}^{-1}\right)^{-1} = \left(\varepsilon\mathbf{I}_N - \Delta_{\mathbf{Q}}\right)^{-1} = \left(\varepsilon\mathbf{I}_N - \mathbf{Q} + \mathbf{I}\right)^{-1}.$$

Un petit calcul montre que l'on a en fait

$$\mathbf{G}^{N,\varepsilon} = \left(\mathbf{I} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathbf{I}_N\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathbf{Q}\left(\mathbf{I} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathbf{I}_N\right)\right].$$

Tout ceci étant dit, nous pouvons commencer la démonstration elle-même. Sur $\{\mathbf{R}_N \in F_L\}$, on a par définition de $\mathcal{K}_L$

$$F^{N,\varepsilon} \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|V_N|L\right) > 0.$$

On peut donc écrire, en utilisant (3.6)

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log P\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right) &= \limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log \mathbb{E}^{P^{N,\varepsilon}}\left(\frac{1}{F^{N,\varepsilon}}1_{\{\mathbf{R}_N\in F_L\}}\right)\\
&\leq \limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log P^{N,\varepsilon}\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right)\\
&\quad +\limsup_{N\to\infty} N^{-d}\left(\frac{\varepsilon}{2}\left|V_N\right|L\right) + \limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log Z^{N,\varepsilon}\\
&= \limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log P^{N,\varepsilon}\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right) + \frac{\varepsilon L}{2} + \phi(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Donc si l'on parvient à montrer que

$$\limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log P^{N,\varepsilon}\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right) \leq -\inf_{F_L}\mathbf{h}\left(\cdot|P^{\varepsilon}\right). \tag{3.7}$$

alors l'inégalité (2.5) page 15 entraînera que

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log P\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right) &\leq \frac{\varepsilon L}{2} + \phi(\varepsilon) - \inf_{F_L}\mathbf{h}\left(\cdot|P^{\varepsilon}\right)\\
&= \frac{\varepsilon L}{2} + \phi(\varepsilon) - \inf_{F_L}\{\mathbf{h}\left(\cdot|P\right) + \frac{\varepsilon}{2}\left\langle\omega_0^2\,,\,\cdot\right\rangle + \phi(\varepsilon)\}\\
&\leq \frac{\varepsilon L}{2} + \phi(\varepsilon) - \phi(\varepsilon) - \inf_{F_L}\mathbf{h}\left(\cdot|P\right).
\end{aligned}$$

Vraie pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, d'où le résultat.

Reste à démontrer (3.7). On veut se ramener au fait que $\mathbf{R}_N$ satisfait à un N^d-PGD sous P^{ε} de fonction de taux $\mathbf{h}\left(\cdot|P^{\varepsilon}\right)$. On a $\mathbf{R}_N = \tilde{\mathbf{R}}_N \circ \pi_N$ et $\tilde{\mathbf{R}}_N$ est $\mathbb{R}^{V_N}$-mesurable. Il en découle alors que $P^{N,\varepsilon}\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right) = P_N^{N,\varepsilon}\left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in F_L\right)$. Il est clair que $P_N^{N,\varepsilon} \ll P_N \ll P_N^{\varepsilon}$, posons alors $\Phi_N \triangleq \dfrac{dP_N^{N,\varepsilon}}{dP_N^{\varepsilon}}$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
P^{N,\varepsilon}\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right) &= P_N^{N,\varepsilon}\left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in F_L\right)\\
&= \mathbb{E}^{P_N^{\varepsilon}}\left[\Phi_N.1_{\{\tilde{\mathbf{R}}_N\in F_L\}}\right]\\
&\leq \mathbb{E}^{P_N^{\varepsilon}}\left[\Phi_N^p\right]^{\frac{1}{p}}.\mathbb{E}^{P_N^{\varepsilon}}\left[1_{\{\tilde{\mathbf{R}}_N\in F_L\}}\right]^{\frac{1}{q}} \quad \text{Inég. de Hölder avec } \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1,\ p\in]1,\infty[\\
&\leq \mathbb{E}^{P_N^{\varepsilon}}\left[\Phi_N^p\right]^{\frac{1}{p}}.P^{\varepsilon}\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

p étant destiné à tendre vers ∞ et donc q vers 1. En passant aux logarithmes et aux limites supérieures on obtient

$$\limsup_{N\to\infty} N^{-d} \log P^{N,\varepsilon}\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right) \leq \frac{1}{p} \limsup_{N\to\infty} N^{-d} \log \mathbb{E}^{P_N^\varepsilon}\left[\Phi_N^p\right] + \frac{1}{q} \underbrace{\limsup_{N\to\infty} N^{-d} \log P^{\varepsilon}\left(\mathbf{R}_N \in F_L\right)}_{\leq -\inf_{F_L} \mathbf{h}(\cdot|P^\varepsilon)}.$$

Nous allons montrer que

$$\mathbb{E}^{P_N^\varepsilon}\left[\Phi_N^p\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 1. \tag{3.8}$$

Ce qui achèvera la démonstration (faire tendre p vers ∞). Rappelons que l'on note $\mathbf{G}_N$ la covariance de P_{V_N} et $\mathbf{G}^{N,\varepsilon}$ la covariance de P_N^ε. On a alors, par définition de Φ

$$\Phi(x) = \left(\frac{\det \mathbf{G}^{N,\varepsilon}}{\det \mathbf{G}_N}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\langle\left({\mathbf{G}_N}^{-1} - (\mathbf{G}^{N,\varepsilon})^{-1}\right) x\,,\, x\right\rangle\right].$$

Donc

$$\mathbb{E}^{P_N^\varepsilon}\left[\Phi_N^p\right] = \left(\frac{\det \mathbf{G}^{N,\varepsilon}}{\det \mathbf{G}_N}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\det \mathbf{G}^{N,\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{N^d}{2}} \int_{\mathbb{R}^{V_N}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left\langle\left(p\left[{\mathbf{G}_N}^{-1} - (\mathbf{G}^{N,\varepsilon})^{-1}\right] + (\mathbf{G}^{N,\varepsilon})^{-1}\right)x\,,\, x\right\rangle\right]} dx.$$

Or on a ${\mathbf{G}_N}^{-1} - (\mathbf{G}^{N,\varepsilon})^{-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ car $\mathbf{G}^{N,\varepsilon}{\mathbf{G}_N}^{-1} - \mathbf{I}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ et $\mathbf{G}^{N,\varepsilon}{\mathbf{G}_N}^{-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbf{I}$. Donc la matrice $p\left[{\mathbf{G}_N}^{-1} - (\mathbf{G}^{N,\varepsilon})^{-1}\right] + (\mathbf{G}^{N,\varepsilon})^{-1}$ est symétrique définie positive pour N assez grand et on a alors

$$\mathbb{E}^{P_N^\varepsilon}\left[\Phi_N^p\right] = \left(\mathbf{G}^{N,\varepsilon}{\mathbf{G}_N}^{-1}\right)^{\frac{p}{2}} \det\left(p\left(\mathbf{G}^{N,\varepsilon}{\mathbf{G}_N}^{-1} - \mathbf{I}_N\right) + \mathbf{I}_N\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'où (3.8).

$\blacksquare$

Chapitre 4

Deuxième principe de grandes déviations

4.1 Le théorème

Le théorème 3.1, page 23, affirme que la mesure empirique $\mathbf{R}_N$ satisfait, sous P, à un N^d-PGD faible de fonction de taux $\mathbf{h}(\cdot|P)$. Rappelons que

$$\mathbf{h}(\cdot|P) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d}\mathbf{H}_N(\cdot|P).$$

Ce PGD ne donne aucune information sur l'ensemble $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$, la fonction de taux $\mathbf{h}(\cdot|P)$ s'y annulant. Il semble donc que l'ordre N^d soit trop élevé pour obtenir une information sur $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$. Cette information est «écrasée »par N^d. Il est donc clair que l'ordre N^d doit être réduit. Or nous avons vu dans le deuxième chapitre que la fonction

$$\mathbf{c}(\mu|P) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}}\mathbf{H}_N(\mu|P).$$

est bien définie et est infinie en dehors de $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$. En fait, on a d'après le théorème 2.6

$$\mathbf{c}(\mu|P) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|\phi\|_V^2 \mathcal{E}_V(1_V) & \text{si} \quad \mu = \int_V \gamma_{\phi(x)}\, dx \in \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}) \\ \\ +\infty & \text{si} \quad \mu \notin \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q}). \end{cases}$$

Cette fonction semble donc être tout indiquée pour servir de fonction de taux dans un éventuel N^{d-2}-PGD pour $\mathbf{R}_N$ sous P. Les choses ne sont en fait pas si simples. En effet, reprenons l'exemple de la moyenne empirique $\mathbf{M}_N : \Omega \to \mathbb{R}$ de la boite V_N définie par

$$\mathbf{M}_N(\omega) \triangleq \langle \omega_0\,,\, \mathbf{R}_N(\omega)\rangle = \frac{1}{|V_N|}\sum_{k\in V_N} \omega_k.$$

$\mathbf{M}_N$ est gaussienne, on a donc, pour tout $m > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P(\mathbf{M}_N \geq m) = -\frac{m^2}{2\langle 1_V\,,\, K_V(1_V)\rangle}. \tag{4.1}$$

D'autre part, on a pour tout ϕ dans $\mathbb{L}^2(V)$

$$\frac{\langle \phi\,,\, 1_V\rangle^2}{2\langle 1_V\,,\, K_V(1_V)\rangle} < \frac{1}{2}\|\phi\|_{\mathbb{L}^2}^2 \mathbf{cap}_A(V). \tag{4.2}$$

Or comme $\mathcal{E}_V(1_V) = \mathbf{cap}_A(V)$, on a

$$\mathbf{c}\left(\gamma_m|P\right) = \frac{m^2}{2}\mathbf{cap}_A(V) \quad \text{pour} \ \ \gamma_m \in \mathfrak{G}^E\left(\mathbf{Q}\right).$$

Si $\mathbf{R}_N$ satisfaisait à un tel PGD, l'inégalité (4.2), combinée avec (4.1) entraînerait alors une contradiction avec la définition de $\mathbf{c}\left(\cdot|P\right)$. $\mathbf{c}\left(\cdot|P\right)$ n'est donc pas la bonne fonction de taux pour un N^{d-2}-PGD sous P pour $\mathbf{R}_N$. La fonction de taux correcte est en fait bien différente...

Théorème 4.1
Pour tout ouvert $O \in \mathcal{M}_1^S\left(\Omega\right)$ on a

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(R_N \in O\right) \geq -\inf_O \mathcal{C}\left(\cdot|P\right). \tag{4.3}$$

Pour tout fermé $F \in \mathcal{M}_1^S\left(\Omega\right)$ on a

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(R_N \in F\right) \leq -\inf_F \mathcal{C}\left(\cdot|P\right). \tag{4.4}$$

Où la fonction $\mathcal{C}\left(\cdot|P\right)$ est définie pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1^S\left(\Omega\right)$ par[1]

$$\mathcal{C}\left(\mu|P\right) \triangleq \frac{1}{2}\inf\left\{\mathcal{E}_V(\phi) \quad, \phi \in \mathbb{L}^2(V), \quad \mu = \int_V \gamma_{\phi(x)}\,dx\right\}. \tag{4.5}$$

De plus, $\mathcal{C}\left(\cdot|P\right)$ est **sci** *et a des ensembles de niveau compacts sur $\mathcal{M}_1^S\left(\Omega\right)$.*

Remarque 4.2
Le fait que $\mathcal{C}\left(\cdot|P\right)$ soit **sci** *et soit à ensembles de niveau compacts est immédiat. On a en effet $\mathcal{C}\left(\mu|P\right) \geq \frac{1}{2\lambda_1}\|\phi\|^2_{\mathbb{L}^2(V)}$.*

Remarque 4.3
Comme $\mathcal{E}_V(1_V) = \mathbf{cap}_A(V)$, on a pour tout $\gamma_m \in \mathfrak{G}^E\left(\mathbf{Q}\right)$

$$\mathbf{c}\left(\gamma_m|P\right) = \mathcal{C}\left(\gamma_m|P\right) = \frac{m^2}{2}\mathbf{cap}_A(V).$$

De façon plus générale, on a pour tout $\mu \in \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)$

$$\mathbf{c}\left(\mu|P\right) \leq \frac{1}{\lambda_1 \mathbf{cap}_A(V)}\mathcal{C}\left(\mu|P\right).$$

On sait que $\mathbf{c}\left(\cdot|P\right)$ est affine. Qu'en est-il de $\mathcal{C}\left(\cdot|P\right)$? En fait $\mathcal{C}\left(\cdot|P\right)$ n'est même pas convexe ! On peut le voir, par exemple en considérant un $\mu \in \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)$ obtenu comme combinaison convexe d'éléments extrémaux $\gamma_{m_i} \in \mathfrak{G}^E\left(\mathbf{Q}\right)$

$$\mu \ \triangleq \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_{m_i} \quad \text{où} \quad \alpha_i \in]0,1[\ \textit{et} \ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Comme $\mathcal{E}_V(\phi) = +\infty$ quand $\phi \in \mathbb{L}^2(V)$ est discontinue, on a par définition de $\mathcal{C}\left(\cdot|P\right)$

$$\mathcal{C}\left(\mu|P\right) = +\infty$$

alors que les $\mathcal{C}\left(\gamma_{m_i}|P\right)$ peuvent très bien être tous finis.

Nous allons à présent aborder la preuve de la minoration. La preuve est basée sur l'utilisation du lemme 2.5 page 17. La technique ressemble un peu à celle utilisée pour démontrer (3.1).

1. Avec bien sûr la convention $\inf \emptyset = +\infty$

4.2 Preuve de la minoration

La preuve de (4.3) sera semblable en bien des aspects à celle de (3.1). En fait, on y retrouve des techniques courantes de grandes déviations pour la minoration.

On peut bien sûr se retreindre au cas où $\mu \in \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$ car sinon $\mathcal{C}(\mu|P)$ est infinie et l'inégalité est triviale. En fait, il suffit de montrer que pour tout $\mu \in \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$, pour tout $\phi \in \mathbb{L}^2(V)$ tel que $\mu = \int_V \gamma_{\phi(x)} dx$ on a

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P(\mathbf{R}_N \in O) \geq -\frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi)$$

car

$$\sup_{\mu\in O} \Big\{ -\frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi) \; ; \; \mu = \int_V \gamma_{\phi(x)} dx, \; \phi \in \mathbb{L}^2 \Big\} = \sup_{\mu \in O} -\mathcal{C}(\mu|P) = -\inf_{\mu\in O} \mathcal{C}(\mu|P).$$

Nous pouvons aussi supposer que $\mathcal{E}_V(\phi) < +\infty$ car sinon l'inégalité est triviale. Nous allons nous ramener à la situation du lemme 2.5. En utilisant la décomposition de ϕ dans la base hilbertienne $(e_n)_n$, on voit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\phi^\varepsilon \in \mathcal{C}^1(V;\mathbb{R})$ tel que $\mu^\varepsilon \triangleq \int_V \gamma_{\phi^\varepsilon(x)} dx \in O$ et $\mathcal{E}_V(\phi^\varepsilon) \leq \mathcal{E}_V(\phi) + \varepsilon$.

Reprenons les notations du (2.5). Soit donc $\mu^\varepsilon_{\phi_N}$ le champs gaussien sur $\mathbb{R}^{V_N}$ de moyenne ϕ^ε_N et de covariance $\mathbf{G}_N$. Nous allons montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \mu^\varepsilon_{\phi_N} \left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in O \right) = 1. \tag{4.6}$$

Cette propriété va jouer un peu le même rôle que le théorème ergodique dans la preuve de la minoration (3.1). On aura alors, d'après (2.17),

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P(\mathbf{R}_N \in O) \geq -\frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi^\varepsilon) \geq -\frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi) - \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{4.7}$$

Ce qui achèvera la démonstration.

Montrons (4.6). Il est clair que si l'on remplace ϕ^ε par un $\tilde{\phi}$ étagé de la forme

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{i=1}^n m_i 1_{V^i}(x)$$

où $V^1, \ldots, V^n$ est une partition de V on aura, d'après le théorème ergodique 1.1 page 2

$$\lim_{N\to\infty} \mu^{\tilde{\phi}} \left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in O \right) = 1.$$

Mais on a aussi $\mathcal{E}_V(\tilde{\phi}) = +\infty$ car $\tilde{\phi}$ est discontinue. L'idée est donc d'approcher ϕ^ε avec de tels $\tilde{\phi}$. Soit $\delta > 0$, ϕ^ε étant $\mathcal{C}^1$, il existe un $\phi^{\varepsilon,\delta}$ vérifiant

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{V_N} \sum_{k\in V_N} \left| \phi^{\varepsilon,\delta}_N(k) - \phi^\varepsilon_N(k) \right| \leq \delta.$$

On a pour tout $E \subset \mathbb{R}^{V_N}$

$$\mu^\varepsilon_{\phi_N}(E) = \gamma_{\phi^{\varepsilon,\delta}} \left(E + \phi^\varepsilon_N - \phi^{\varepsilon,\delta}_N \right).$$

Pour δ assez petit on a donc

$$\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}\left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in O\right) \geq \gamma_{\phi_N^{\varepsilon,\delta}}\left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in \tilde{O}\right)$$

où $\tilde{O}$ est un voisinage ouvert de $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$ contenant $\int_V \gamma_{\phi^\varepsilon(x)} dx$. Donc finalement

$$\liminf_{N\to\infty} \mu^{\varepsilon}_{\phi_N}\left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in O\right) \geq \liminf_{N\to\infty} \gamma^{\phi^{\varepsilon,\delta}}\left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in \tilde{O}\right) = 1.$$

(4.6) est donc démontrée. Reste à démontrer (4.7). $\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}$ et P_{V_N} étant des gaussiennes de même covariance $\mathbf{G}_N$, on a $\mu^{\varepsilon}_{\phi_N} \ll P_{V_N}$. Posons alors

$$\begin{aligned} f_N &\triangleq \frac{\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}}{P_{V_N}} \\ A_N &\triangleq \{f_N > 0\} \cap \{\tilde{\mathbf{R}}_N \in O\}. \end{aligned}$$

Bien évidement, $\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N) = \mu^{\varepsilon}_{\phi_N}\left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in O\right)$. On a

$$\begin{aligned} P(\mathbf{R}_N \in O) &= P_{V_N}\left(\tilde{\mathbf{R}}_N \in O\right) \\ &= \mathbb{E}^{P_{V_N}}\left[1_{\{\tilde{\mathbf{R}}_N \in O\}}\right] \\ &\geq \mathbb{E}^{P_{V_N}}\left[1_{A_N}\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}}\left[f_N^{-1} 1_{A_N}\right]. \end{aligned}$$

D'après (4.6), à partir d'un certain rang sur N, $\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N) > 0$. Donc

$$\begin{aligned} \log P(\mathbf{R}_N \in O) &\geq \log \int_{A_N} f_N^{-1} d\mu^{\varepsilon}_{\phi_N} \\ &= \log \mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N) + \log \int_{A_N} \frac{1}{f_N \mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N)} d\mu^{\varepsilon}_{\phi_N} \\ &\geq \log \mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N) - \int_{A_N} \frac{1}{\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N)} \log f_N d\mu^{\varepsilon}_{\phi_N} \quad \text{(inégalité de Jensen)} \\ &= \log \mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N) - \frac{1}{\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N)} \int_{A_N} \log f_N d\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}. \end{aligned}$$

Or comme $x\log(x) > -e^{-1}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\int_{A_N^c} \log f_N d\mu^{\varepsilon}_{\phi_N} = \int_{A_N^c} f_N \log f_N dP_{V_N} \geq -\frac{1}{e} P\left(A_N^c\right) \geq -\frac{1}{e}.$$

On a donc

$$\log P(\mathbf{R}_N \in O) \geq \log \mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N) - \frac{1}{e\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N)} - \frac{1}{\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}(A_N)} \mathbf{H}_N\left(\mu^{\varepsilon}_{\phi_N} | P\right).$$

Or d'après (2.17) on a

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \mathbf{H}_N\left(\mu^{\varepsilon}_{\phi_N} | P\right) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi^\varepsilon).$$

Donc finalement, compte tenu de (4.6) on a

$$\begin{aligned}\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} P\left(\mathbf{R}_N \in O\right) &\geq \liminf_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N^{d-2}} \log \mu^{\varepsilon}_{\phi_N}\left(A_N\right) - \frac{1}{eN^{d-2}\mu^{\varepsilon}_{\phi_N}\left(A_N\right)} - \frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi^{\varepsilon})\right] \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi^{\varepsilon}).\end{aligned}$$

Ce qui prouve (4.7).

■

4.3 Preuve de la majoration

Il s'agit de démontrer l'inégalité (4.4). Nous allons introduire, pour les besoins de la preuve, différentes suites de variables aléatoires dérivées de $\mathbf{R}_N$ et à valeurs dans différents espaces de mesures. L'idée directrice est d'utiliser la décomposition du champs gaussien ω sous P en deux champs ξ et y abordée page 7. Cette décomposition est obtenue en quelque sorte en soustrayant de ω l'information relative au sous-réseau $\log(N).\mathbb{Z}^d$. Le champs y a alors des covariances à décroissance exponentielle. L'obtention de PGD sous P pour ces suites de v.a. permettra, grâce à de la tension exponentielle, voir (1.5) page (3), et au principe de contraction, voir (1.7) page (4), d'obtenir le résultat escompté.

Pour tout $r > 0$, on note $\mathcal{M}_r(V)$ l'ensemble des mesures signées sur V dont la variation totale est inférieure ou égale à r. La variation totale d'une mesure étant, classiquement, la norme de cette mesure en tant que forme linéaire sur l'ensemble des fonctions continues bornées. On note aussi $\mathcal{M}(V)$ l'ensemble $\bigcup_{r>0} \mathcal{M}_r(V)$. On muni chaque $\mathcal{M}_r(V)$ de la topologie de la convergence étroite qui en fait un espace topologique compact. L'ensemble $\mathcal{M}(V)$ étant alors muni de la topologie inductive, c'est à dire que ses ouverts sont ses sous-ensembles dont la trace sur chaque $\mathcal{M}_r(V)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_r(V)$.

On définit la mesure empirique $\mathbf{X}_N : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{M}(V)$ par

$$\mathbf{X}_N(\omega) \triangleq \frac{1}{V_N} \sum_{k\in V_N} \omega_k.\delta_{\frac{k}{N}}.$$

On note $\mathcal{M}_1(V\times\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $V\times\mathbb{R}$ que l'on muni de la topologie de la convergence étroite.

On définit la mesure empirique $\mathbf{Y}_N : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{M}_1(V\times\mathbb{R})$ par

$$\mathbf{Y}_N(\omega) \triangleq \frac{1}{V_N} \sum_{k\in V_N} \delta_{\frac{k}{N}} \otimes \delta_{\omega(k)}.$$

Nous avons déjà vu (voir (1.4) page 5) que le champs gaussien $(\omega_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ admet pour tout $L \in \mathbb{N}$ une décomposition de la forme $\omega = y + \xi$ où $\xi_k \triangleq \mathbb{E}\left[\omega_k | \sigma\left\{(\omega_{L.k})_{k\in\mathbb{Z}^d}\right\}\right]$ et les champs $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ et $(\omega_{L.k})_{k\in\mathbb{Z}^d}$ sont indépendants. De plus, ξ admet la représentation suivante

$$\xi_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} q_k\left(i\right)\omega_{L.i}.$$

Les $q_k(i)$ étant définis à partir de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de matrice $\mathbf{Q}$. Si on note $\mathbf{G}^L$ la covariance du champs centré y, alors on a d'après (1.7), pour tout $i, j \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbf{G}\left(j,i\right) - \mathbf{G}^L\left(j,i\right) = \sum_k q_i\left(k\right)\mathbf{G}\left(j,L.k\right).$$

Et on a d'après (1.8), pour tout $i, j \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbf{G}^L(i,j) \leq c_1 \exp\left[c_2|i-j|L^{-\frac{d}{2}}\right]$$

c_1 et c_2 étant des constantes strictement positives indépendantes de i et j. La décroissance très rapide de $\mathbf{G}^L$ est essentielle. Dans la suite, on prendra $L = \log(N)$.

On définit alors la mesure empirique $\mathbf{Z}_N : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{M}_1(V\times\mathbb{R})$ par

$$\mathbf{Z}_N(\omega) \triangleq \frac{1}{V_N} \sum_{k\in V_N} \delta_{\frac{k}{N}} \otimes \mathcal{N}\left(\xi_k(\omega), \sigma^2\right).$$

On définit les fonctions $\bar{\mathbf{J}}(\cdot) : \mathcal{M}_1(V\times\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ et $\mathbf{J}(\cdot) : \mathcal{M}(V) \to [0,+\infty]$ par

$$\mathbf{J}(\mu) \triangleq \frac{1}{2}\sup_{f\in\mathcal{C}(V)}\left\{\langle\mu\,,\,f\rangle_V - \frac{1}{2}\langle f\,,\,K_V(f)\rangle_V\right\}$$

et

$$\bar{\mathbf{J}}(\mu) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi) & \text{si} \quad \mu(dx) = dx\otimes\mathcal{N}\left(\phi(x),\sigma^2\right) \text{ avec } \phi\in\mathbb{L}^2(V) \\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

La preuve de la majoration (4.4) sera structurée de la manière suivante :

- 1° Montrer tout d'abord que $\mathbf{X}_N$ satisfait à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux $\mathbf{J}(\cdot)$. La preuve se fera sans grande difficulté car $\mathbf{X}_N$ est gaussienne.
- 2° Déduire du PGD de $\mathbf{X}_N$ que $\mathbf{Z}_N$ satisfait à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux $\bar{\mathbf{J}}(\cdot)$.
- 3° Déduire du PGD de $\mathbf{Z}_N$ que $\mathbf{Y}_N$ satisfait à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux $\bar{\mathbf{J}}(\cdot)$.
- 4° Déduire du PGD satisfait par $\mathbf{Y}_N$, grâce au principe de contraction et à de la tension exponentielle la majoration (4.4).

L'idée directrice ici étant de profiter de la décroissance exponentielle de la covariance $\mathbf{G}^L$ du champs y sous P.

4.3.1 Principe de grandes déviations pour $\mathbf{X}_N$

Tout d'abord, voici une propriété importante de la fonction $\mathbf{J}(\cdot)$.

Lemme 4.4
$\mathbf{J}(\cdot)$ *est* **sci** *convexe, a des ensembles de niveau compacts et vérifie*

$$\mathbf{J}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi) & \textit{si} \quad \mu(dx) = \phi(x)dx \textit{ avec } \phi\in\mathbb{H}^1(\overset{\circ}{V}) \\ +\infty & \textit{sinon.}\end{cases} \tag{4.8}$$

Preuve

Montrons tout d'abord (4.8). Soit $\mu(dx) \triangleq \phi(x)dx$ avec $\phi \in \mathbb{H}^1(\overset{\circ}{V})$. Les vecteurs propres e_n de l'opérateur K_V étant $\mathcal{C}^1$, on a

$$\mathbf{J}(\mu) \triangleq \sup_{f\in\mathcal{C}(V)} \left\{ \langle \mu\,,\, f\rangle_V - \frac{1}{2}\langle f\,,\, K_V(f)\rangle_V \right\} = \sup_{f\in\mathbb{L}^2(V)} \left\{ \langle \mu\,,\, f\rangle_V - \frac{1}{2}\langle f\,,\, K_V(f)\rangle_V \right\}.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'expression variationnelle (2.14a) de $\mathcal{E}_V$ pour obtenir $\mathbf{J}(\mu) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_V(\phi)$. Reste à montrer que l'on a $\mathbf{J}(\mu) = +\infty$ quand μ n'est pas de la forme indiquée. L'idée est de régulariser la mesure μ.

Pour tout compact $W \subset\subset \mathbb{R}^d$ et toute mesure signée ν sur $\mathbb{R}$ à support topologique inclus dans W, on note

$$\mathbf{J}_W(\nu) \triangleq \frac{1}{2} \sup_{f\in\mathcal{C}(V)} \left\{ \langle \nu\,,\, f\rangle_W - \frac{1}{2}\langle f\,,\, K_W(f)\rangle_W \right\}.$$

Donc si $\mathrm{supp}(\nu) \subset W_1 \subset W_2$, on a $\mathbf{J}_{W_1}(\nu) = \mathbf{J}_{W_2}(\nu)$.

Soit ρ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue à support dans la boule unité. On définit

$$\rho_\varepsilon(x) \triangleq \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On considère maintenant $W \triangleq [-1,2]^d$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\| \leq 1$ on a, en notant $\theta_x\mu$ la mesure μ translatée de x

$$\mathbf{J}_W(\theta_x\mu) = \mathbf{J}_V(\mu)\,.$$

La convexité de $\mathbf{J}_W(\cdot)$ donne alors pour tout ε tel que $|\varepsilon| < 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_W(\mu_\varepsilon) &\triangleq \mathbf{J}_W\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\theta_x\mu dx\right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\mathbf{J}_W(\theta_x\mu)\,dx \\ &= \mathbf{J}(\mu). \end{aligned}$$

Or μ_ε a une densité régulière $g_\varepsilon(x) = \int h_\varepsilon(x-y)\mu(dx)$ à support dans $\mathrm{int}(W)$. Donc si μ n'a pas de densité dans $\mathbb{H}^1(\overset{\circ}{V})$ par rapport à la mesure de Lebesgue, alors

$$\mathbf{J}_W(\mu_\varepsilon) = \frac{1}{2}\|\nabla g_\varepsilon\|_A^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty.$$

(4.8) est donc démontrée.

$\mathbf{J}(\cdot)$ est définie comme supremum de fonctions affines **sci** , elle est donc **sci** convexe. Reste à voir ses ensembles de niveau sont compacts. C'est une conséquence directe de la formule (4.8), du fait que $\mathbb{H}^1(\overset{\circ}{V}) \subset \mathbb{L}^1(V)$ est compacte et du fait que $\phi \in \mathbb{L}^1(V) \mapsto \phi(x)dx \in \mathcal{M}(V)$ est continue. Le lemme est donc prouvé.

■

Passons maintenant au PGD satisfait par $\mathbf{X}_N$.

Proposition 4.5
$\mathbf{X}_N$ *satisfait sous P à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux* $\mathbf{J}(\cdot)$.

Preuve

La borne inférieure est une conséquence directe de la minoration (4.3) page 30 déjà démontrée et du lemme 4.8 précédent qui permet de faire le lien entre $\mathbf{J}(\cdot)$ et $\mathcal{C}(\cdot|P)$.

Passons à présent à la majoration. L'idée est de démontrer une majoration faible, (i.e. valable uniquement pour les compacts) grâce à la méthode de Laplace (cf. (1.8) page 5) puis de passer à une majoration pour tout les fermés grâce à de la tension exponentielle (en utilisant le théorème 1.6 page 4). Montrons que l'on a la tension exponentielle suivante

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-2}}\log P\left(\mathbf{X}_N\notin\mathcal{M}_r(V)\right)=-\infty. \tag{4.9}$$

D'après (1.6), on a pour tout a tel que $0<a<\lambda_1^{-1}$

$$\begin{aligned}\log\mathbb{E}^P\left[\exp\left(\frac{aN^{d-2}}{2}\langle\omega^2(0)\,,\,\mathbf{R}_N\rangle\right)\right] &= \log\mathbb{E}^P\left[\exp\left(\frac{a}{2N^2}\sum_{k\in V_N}\omega^2(k)\right)\right]\\ &\leq \frac{a}{2N^2}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{G}_N\right)\\ &\quad+\frac{1}{2\lambda_1^2}\mathrm{Tr}\left({\mathbf{G}_N}^2\right)\left(-\log\left(1-\frac{a\lambda_1}{N^2}\right)-\frac{a\lambda_1}{N^2}\right).\end{aligned}$$

Or la covariance $\mathbf{G}_N$ vérifie

$$\sup_{i\in V_N}\sum_{j\in V_N}\mathbf{G}(i,j)=\mathcal{O}\left(N^2\right),\quad \mathrm{Tr}\left(\mathbf{G}_N\right)=N^d\sigma^2,\quad \mathrm{Tr}\left({\mathbf{G}_N}^2\right)=\mathcal{O}\left(N^{d+1}\right).$$

Donc on a

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-2}}\log\mathbb{E}^P\left[\exp\left(\frac{aN^{d-2}}{2}\langle\omega^2(0)\,,\,\mathbf{R}_N\rangle\right)\right]\leq\frac{a\sigma^2}{2}.$$

Cette inégalité, combinée au lemme 1.9 page 5, donne, pour tout $r>0$

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-2}}\log P\left(\mathbf{X}_N\notin\mathcal{M}_r(V)\right) &\leq \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-2}}\log P\left(\frac{1}{N^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|\omega(k)|>r\right)\\ &\leq \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-2}}\log P\left(\langle\omega^2(0)\,,\,\mathbf{R}_N\rangle>r^2\right)\\ &\leq -\frac{r^2-\sigma^2}{2\lambda_1}.\end{aligned}$$

On a donc obtenu (4.9). La N^{d-2}-tension exponentielle étant prouvée, il nous reste à montrer que l'on a la majoration du N^{d-2}-PGD pour les compacts. Nous allons utiliser la méthode de la transformée de Laplace.

Pour toute fonction $f\in\mathcal{C}(V)$, la v.a. $\langle f\,,\,\mathbf{X}_N\rangle$ est gaussienne sous P et vérifie (voir [12])

$$\lim_{N\to\infty}N^{d-2}\mathbb{E}^P\left[\langle f\,,\,\mathbf{X}_N\rangle^2\right]=\langle f\,,\,K_V\left(f\right)\rangle_V.$$

Donc on a

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-2}}\log\mathbb{E}^P\left[\exp\left(N^{d-2}\langle f\,,\,\mathbf{X}_N\rangle\right)\right]=\frac{1}{2}\langle f\,,\,K_V\left(f\right)\rangle_V.$$

On obtient donc la majoration du PGD cherchée pour les compacts en appliquant le théorème 1.8 page 5. Ce résultat, combiné à la tension exponentielle (4.9) permet d'étendre la majoration aux fermés en appliquant le théorème 1.6 page 4.

■

4.3.2 Principe de grandes déviations pour $\mathbf{Z}_N$

Notre objectif, dans cette section, est de déduire du N^{d-2}-PGD de fonction de taux $\mathbf{J}(\cdot)$ satisfait par $\mathbf{X}_N$, un N^{d-2}-PGD pour $\mathbf{Z}_N$ de fonction de taux $\bar{\mathbf{J}}(\cdot)$.

Tout d'abord, remarquons que $\bar{\mathbf{J}}(\cdot)$ à des ensembles de niveau compacts (donc **sci**) car l'inclusion $\mathbb{H}^1(\overset{\circ}{V}) \subset \mathbb{L}^1(V)$ est compacte.

Proposition 4.6
$\mathbf{Z}_N$ satisfait à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux $\bar{\mathbf{J}}(\cdot)$.

Pour arriver à ce résultat, nous devons tout d'abord faire le lien entre $\mathbf{X}_N$ et $\mathbf{Z}_N$. Soit $(h_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante $\mathcal{C}^\infty$ symétrique sur $\mathbb{R}^d$ telle que le support de sa base h soit dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\mu \in \mathcal{M}(V)$, on définit alors les fonctions $\mu_\varepsilon \in \mathcal{C}(V)$ par

$$\mu_\varepsilon \triangleq \int_V h_\varepsilon(x-y)\mu(dy).$$

On considère l'opérateur injectif continu $\Phi(.) : \mathbb{L}^1(V) \to \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donné par

$$\Phi(\phi)(dx \otimes dt) \triangleq dx \otimes \mathcal{N}\left(\phi(x), \sigma^2\right)(dt).$$

On définit enfin les opérateurs $\Phi_\varepsilon(\cdot) : \mathcal{M}(V) \to \mathcal{M}_1(V \times \mathbb{R})$ par

$$\Phi_\varepsilon(\mu) \triangleq \Phi(\mu_\varepsilon).$$

Lemme 4.7
Pour tout $\varepsilon > 0$, $\Phi_\varepsilon(\mathbf{X}_N)$ satisfait à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux

$$\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon(\mu) \triangleq \inf_{\Phi_\varepsilon^{-1}(\mu)} \mathbf{J}(\cdot).$$

Preuve

Il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$, $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ est un opérateur continu. Le principe de contraction (voir (1.7) page 4), appliqué au PGD (4.5) vérifié par $\mathbf{X}_N$ et à $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ nous permet alors d'obtenir le résultat escompté.

■

Il faut maintenant faire le lien entre $\Phi_\varepsilon((\mathbf{X}_N))$ et $\mathbf{Z}_N$. C'est l'objet du lemme 4.8 suivant. On note $\mathbf{d}_*(\cdot,\cdot)$ la métrique sur $\mathcal{M}_1(V \times \mathbb{R})$ définie, pour tout $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(V \times \mathbb{R})$ par

$$\mathbf{d}_*(\mu,\nu) \triangleq \sup\left\{ |\langle \phi \otimes \psi\,,\, \mu - \nu\rangle| \text{ où } \phi \in \mathcal{C}(V), \|\phi\|_{BL} \leq 1,\ \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \|\phi\|_{BL} \leq 1 \right\}.$$

où $\|\cdot\|_{BL}$ est définie, pour tout f par

$$\|f\|_{BL} \triangleq \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{x - y}.$$

La métrique $\mathbf{d}_*(\cdot,\cdot)$ est compatible avec la topologie de la convergence étroite sur $\mathcal{M}_1(V \times \mathbb{R})$.

Lemme 4.8
Pour tout $a > 0$, on a : $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(\mathbf{d}_*(\Phi_\varepsilon(\mathbf{X}_N), \mathbf{Z}_N) \geq a\right) = -\infty.$

Preuve

Si l'on note $\eta_i^\varepsilon \triangleq \xi_i(\omega) - \frac{1}{N^d} \sum_{k \in V_N} h_\varepsilon \left(\frac{i}{N} - \frac{k}{N} \right) \omega_k$ alors on a

$$\mathbf{d}_* (\Phi_\varepsilon (\mathbf{X}_N), \mathbf{Z}_N) \leq \frac{c}{N^d} \left[\sum_{k \in V_N} |\eta_k^\varepsilon| + \frac{1}{\varepsilon^{d+1} N} \sum_{k \in V_N} |\omega_k| \right]. \tag{4.10}$$

En effet, pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$, la fonction

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{N}\left(x, \sigma^2\right)(dy)$$

vérifie $\left\| \tilde{f} \right\|_\infty \leq 1$ et $\left\| \tilde{f}' \right\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma^2}}$.

Analysons (4.10) de plus près. D'après le lemme 1.9 page 5, on a pour tout $a > 0, \varepsilon > 0$,

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P \left(\frac{1}{N^{d+1} \varepsilon^{d+1}} \sum_{k \in V_N} |\omega_k| \geq a \right) = -\infty. \tag{4.11}$$

Montrons que l'on a d'autre part

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P \left(\frac{1}{N^d} \sum_{k \in V_N} |\eta_k^\varepsilon| \geq a \right) = -\infty. \tag{4.12}$$

Il est clair que l'inégalité (4.10), combinée à (4.11) et (4.12) fournit le résultat attendu. Reste à démontrer (4.12). Notons, pour tout i, j dans V_N, $\Gamma_N^\varepsilon(i,j) \triangleq \mathbb{E}\left[\eta_i^\varepsilon \eta_j^\varepsilon\right]$. Notre objectif est d'appliquer le lemme 1.9 page 5 aux η_k^ε. On a $\mathrm{Tr}\left(\left(\Gamma_N^\varepsilon\right)^2\right) = \mathcal{O}\left(N^d\right)$. De plus

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \mathrm{Tr}\left(\Gamma_N^\varepsilon\right) = 0. \tag{4.13}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\Gamma_N^\varepsilon\right) &= \sum_{k \in V_N} \mathbf{var}\left(\eta_k^\varepsilon\right) \\ &\leq 2 \sum_{k \in V_N} \mathbb{E}^P\left[\xi_k^2\right] + 2 \sum_{k \in V_N} \underbrace{\mathbb{E}^P\left[\left(\frac{1}{N^d} \sum_{i \in V_N} h_\varepsilon \left(\frac{k}{N} - \frac{i}{N} \right) \omega_i \right)^2 \right]}_{\mathcal{O}\left(N^{2-d}\right) \text{ à } \varepsilon \text{ fixé, uniformément en } k}. \end{aligned}$$

Le lemme 1.9 page 7 nous donne alors

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \sum_{k \in V_N} \mathbb{E}^P\left[\xi_k^2\right] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \sum_{k \in V_N} \left[\mathbf{G}(k,k) - \mathbf{G}^L(k,k)\right] = 0.$$

D'où (4.13). Montrons que l'on a, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{N \to \infty} \sup_{i \in V_N} \frac{1}{N^2} \sum_{j \in V_N} \left|\Gamma_N^\varepsilon(i,j)\right| = 0. \tag{4.14}$$

Il est clair que (4.14) combinée à (4.13) nous donne (4.12). Reste donc à montrer (4.14). Posons $\tilde{\xi}_k \triangleq \xi_k - \frac{1}{N^d} \sum_{i \in V_N} h_\varepsilon \left(\frac{k}{N} - \frac{i}{N} \right) \xi_i$. Rappelons que d'après le lemme 1.11 page 7, les champs ξ et y sont indépendants. Donc si $\tilde{\Gamma}_N^\varepsilon$ est la covariance de $\tilde{\xi}$ alors

$$\Gamma_N^\varepsilon = \tilde{\Gamma}_N^\varepsilon + \Lambda_N^\varepsilon.$$

On a alors

$$\sup_{i \in V_N} \sum_{j \in V_N} |\Gamma_N^\varepsilon (i,j)| \leq \sup_{i \in V_N} \sum_{j \in V_N} \left| \tilde{\Gamma}_N^\varepsilon (i,j) \right| + \sup_{i \in V_N} \sum_{j \in V_N} |\Lambda_N^\varepsilon (i,j)|.$$

Or en utilisant la décroissance exponentielle de la covariance $\mathbf{G}^L$ du champs y (voir (1.8) page 7), on obtient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^\delta} \sup_{i \in V_N} \sum_{j \in V_N} \Lambda_N^\varepsilon (i,j) = 0.$$

D'autre part, on a d'après (2.11) page 16 et (1.7) page 7,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sup_{i \in V_N} \sum_{j \in V_N} \left| \tilde{\Gamma}_N^\varepsilon (i,j) \right| = 0.$$

Ce qui achève la preuve.

■

Nous pouvons maintenant démontrer le PGD annoncé pour $\mathbf{Z}_N$.

Preuve de la proposition 4.6

Les lemmes 4.7 et 4.8 entraînent que $\mathbf{Z}_N$ satisfait à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux $\tilde{\mathbf{J}}(\cdot)$ définie pour tout μ par

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mu) \triangleq \liminf_{\varepsilon \to 0, \nu \to \mu} \bar{\mathbf{J}}_\varepsilon(\nu).$$

Reste donc à montrer que $\tilde{\mathbf{J}}(\cdot) = \bar{\mathbf{J}}(\cdot)$. Montrons que $\tilde{\mathbf{J}}(\cdot) \leq \bar{\mathbf{J}}(\cdot)$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(V \times \mathbb{R})$. On peut bien sûr supposer que $\bar{\mathbf{J}}(\mu) < \infty$, sinon l'inégalité est triviale. D'après le lemme 4.8, il existe un $f \in \mathbb{H}^1((\overset{\circ}{V}))$ tel que $\mu = \Phi(f)$. On a $\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_\varepsilon (f.dx) = \mu$. D'où $\tilde{\mathbf{J}}(\mu) \leq \bar{\mathbf{J}}(\mu)$. Montrons à présent que $\tilde{\mathbf{J}}(\cdot) \geq \bar{\mathbf{J}}(\cdot)$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(V \times \mathbb{R})$. On peut, là encore, supposer que $\tilde{\mathbf{J}}(\mu) < \infty$. Considérons une famille $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de $\mathcal{M}(V)$ telle que

$$\mathbf{J}(\mu\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \tilde{\mathbf{J}}(\mu) \quad \text{et} \quad \Phi_\varepsilon(\mu_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mu.$$

Comme $\mathbf{J}(\mu_\varepsilon) < \infty$, on a $\mu_\varepsilon(dx) = f_\varepsilon(x)dx$ avec $f_\varepsilon \in \mathbb{H}^1(\overset{\circ}{V})$. On peut supposer que f_ε converge vers f dans $\mathbb{L}^1$ par relative compacité. On a alors $\mu_\varepsilon^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ donc $\Phi(f) = \mu$. D'où

$$\bar{\mathbf{J}}(\mu) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_V(f) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{J}(\mu_\varepsilon) = \tilde{\mathbf{J}}(\mu).$$

D'où le résultat.

■

4.3.3 Principe de grandes déviations pour $\mathbf{Y}_N$

Proposition 4.9
$\mathbf{Y}_N$ satisfait à un N^{d-2}-PGD de fonction de taux $\tilde{\mathbf{J}}(\cdot)$.

Avant d'aborder la preuve de ce PGD, il nous faut faire le lien entre $\mathbf{Z}_N$ et $\mathbf{Y}_N$. C'est l'objet du lemme suivant

Lemme 4.10
Pour tout $a > 0, \delta > 0$, pour toutes $\phi : V \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-\delta}} \log P\left(|\langle \phi \otimes \psi\,,\, \mathbf{Y}_N - \mathbf{Z}_N \rangle| \geq a\right) = -\infty.$$

Preuve du lemme 4.10

Rappelons que $\omega_k = y_k + \xi_k$. On a alors

$$\langle \phi \otimes \psi\,,\, \mathbf{Y}_N - \mathbf{Z}_N \rangle \leq \frac{1}{N^d}\left|\sum_{k\in V_N} \phi\left(\frac{k}{N}\right)\left[\psi(\omega_i) - \left\langle \psi\,,\, \mathcal{N}\left(\xi_i, \sigma^2\right)\right\rangle\right]\right| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{4.15}$$

Donc

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{1}{N^d}\left|\sum_{k\in V_N} \phi\left(\frac{k}{N}\right)\left[\psi(\omega_i) - \left\langle \psi\,,\, \mathcal{N}\left(\xi_i, \sigma^2\right)\right\rangle\right]\right| \geq a\right) \\ &\quad \leq \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^{V_N}} P\left(\frac{1}{N^d}\left|\sum_{k\in V_N} \phi\left(\frac{k}{N}\right)\left[\psi(\alpha_k + y_k) - \left\langle \psi\,,\, \mathcal{N}\left(\alpha_k, \sigma^2\right)\right\rangle\right]\right| \geq a\right). \end{aligned}$$

Or on a pour tout $\beta \in \mathbb{R}$

$$\left|\left\langle \psi\,,\, \mathcal{N}\left(\beta, \sigma^2\right)\right\rangle - \left\langle \psi\,,\, \mathcal{N}\left(\beta, \tilde{\sigma}^2\right)\right\rangle\right| \leq |\sigma - \tilde{\sigma}|.\|\psi\|_{BL}.$$

En posant $\sigma_i^2 \triangleq \mathbb{E}^P\left[y_j^2\right]$ on a, d'après (1.9) page 7

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sum_{k\in V_N} |\sigma_k - \sigma| = 0.$$

Il nous suffit donc de montrer qu'uniformément en β, on a, pour N assez grand

$$P\left(\frac{1}{N^d}\left|\sum_{k} \phi\left(\frac{k}{N}\right)\left[\psi\left(\beta_k - y_k\right) - \left\langle \psi\,,\, \mathcal{N}\left(\beta_k, \sigma_j^2\right)\right\rangle\right]\right| \geq a\right) \leq \exp\left[-cN^{d-\delta}\right].$$

On a donc, d'après le lemme 1.12 page 10

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^P\left[\exp\left(\frac{1}{N^d}\sum_{k\in V_N} \phi\left(\frac{k}{N}\right)\left[\psi\left(\beta_k - y_k\right) - \left\langle \psi\,,\, \mathcal{N}\left(\beta_k, \sigma_k^2\right)\right\rangle\right]\right)\right] \\ &\quad \leq \exp\left[\frac{\|\phi\|_\infty \|\psi\|_{BL}}{N^d} \sum_{i,j\in V_N} \mathbb{E}^P[y_i.y_j]\right] = \exp\left[\frac{\|\phi\|_\infty \|\psi\|_{BL}}{N^d} \sum_{i,j\in V_N} \mathbf{G}^L(i,j)\right]. \end{aligned}$$

Le comportement asymptotique de $\mathbf{G}^L$, donné en (1.8) page 7 permet alors de conclure.

■

Nous pouvons à présent aborder la preuve du PGD annoncé pour $\mathbf{Y}_N$.

Preuve de la proposition 4.9

C'est une conséquence directe du PGD satisfait par $\mathbf{Z}_N$ (proposition 4.6) et du lemme 4.10 précédent.

$\blacksquare$

Nous somme en mesure à présent, de prouver la majoration (4.4) du PGD satisfait par $\mathbf{R}_N$.

4.3.4 Conclusion

Montrons que $\mathbf{R}_N$ satisfait à la tension exponentielle suivante

$$\lim_{L\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} P\left(\mathbf{R}_N \in {\mathcal{K}_L}^c\right) = -\infty. \tag{4.16}$$

Pour tout $a \in \left]0, \frac{1}{\lambda_1}\right[$, on a

$$\begin{aligned}
P\left(\mathbf{R}_N \in {\mathcal{K}_L}^c\right) &= P\left(\omega : \left\langle \mathbf{R}_N(\omega), \omega_0^2 \right\rangle \geq L\right) \\
&= P\left(\sum_{k\in V_N} \omega_k^2 \geq N^d L\right) \\
&= P\left(\frac{a}{2N^2} \sum_{k\in V_N} \omega_k^2 \geq \frac{aN^{d-2}L}{2}\right) \\
&= P\left(\exp\left[\frac{a}{2N^2} \sum_{k\in V_N} \omega_k^2\right] \geq \exp\left[\frac{aN^{d-2}L}{2}\right]\right) \\
&\leq \exp\left[-\frac{aN^{d-2}L}{2}\right] \mathbb{E}^P\left(\exp\left[\frac{a}{2N^2} \sum_{k\in V_N} \omega_k^2\right]\right).
\end{aligned}$$

D'où, en appliquant (1.6) page 6

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(\mathbf{R}_N \in {\mathcal{K}_L}^c\right) \leq \frac{a\sigma^2}{2} - \frac{aL}{2}.$$

On a donc bien (4.16). Donc, en vertu du théorème 1.6 page 4, nous pouvons nous contenter de démontrer la majoration (4.4) du PGD pour les compacts, c'est à dire un PGD faible.

Soit donc K un sous ensemble compact de $\mathcal{M}_1^S(\Omega)$. Montrons que l'on peut supposer que $K \subset \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$. Les ensembles $K \cap \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$ et $K \cap \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})^c$ sont relativement compacts, on a donc, d'après le corollaire 3.2 page 23

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \log P\left(\mathbf{R}_N \in K \cap \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})^c\right) \leq -\inf_{K\cap\bar{\mathfrak{G}}^S(\mathbf{Q})^c} \mathbf{h}(\cdot|P).$$

Or $-\inf_{K\cap\bar{\mathfrak{G}}^S(\mathbf{Q})^c} \mathbf{h}(\cdot|P) < 0$ si $K \cap \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})^c \neq \emptyset$ car d'après la proposition 2.1 page 14, on a $\mathbf{h}(\cdot|P) \geq 0$ et $\mathbf{h}(\cdot|P) = 0$ sur $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$ et sur $\mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})$ seulement. Donc si $K \cap \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})^c \neq \emptyset$,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(\mathbf{R}_N \in K \cap \mathfrak{G}^S(\mathbf{Q})^c\right) = -\infty.$$

Maintenant, en utilisant le lemme 1.5 page 3, on a

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(\mathbf{R}_N \in K\right) &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(\mathbf{R}_N \in K \cap \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)^c\right) \\
&\quad \vee \\
&\quad \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(\mathbf{R}_N \in K \cap \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)\right) \\
&= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\left(\mathbf{R}_N \in K \cap \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)\right).
\end{aligned}$$

car $\max(., -\infty) = .$ si $K \cap \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)^c \neq \emptyset$ et $K = K \cap \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)$ si $K \cap \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)^c = \emptyset$. On peut donc supposer que $K \subset \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)$. K étant compact, il suffit même, au vu du lemme 1.5 page 3, de montrer que pour tout $M \in \mathbb{N}$ et tout $\mu \in \mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{N\to\infty} \log P\left(\mathbf{R}_N \in B_M\left(\mu, \varepsilon\right)\right) \leq -\mathcal{C}\left(\mu|P\right).$$

$B_M\left(\mu, \varepsilon\right)$ étant la boule de centre μ et de rayon ε pour la métrique de Lévy de $\mathcal{M}_1(\Omega_M)$. μ étant dans $\mathfrak{G}^S\left(\mathbf{Q}\right)$, il existe un $\phi \in \mathbb{L}^2(V)$ tel que $\mu \triangleq \int_V \gamma_{\phi(x)} dx$. Il existe alors un $\tilde{\varepsilon} > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\left\{\mathbf{R}_N \in B_M\left(\mu, \varepsilon\right)\right\} &\subset \left\{\mathbf{L}_N \in B_1\left(\int_V \mathcal{N}\left(\phi(x), \sigma^2\right), \tilde{\varepsilon}\right)\right\} \\
&= \left\{\langle \mathbf{Y}_N\, , \,.\otimes 1\rangle_V \in B_1\left(\int_V \mathcal{N}\left(\phi(x), \sigma^2\right), \tilde{\varepsilon}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le principe de contraction (1.7) page 4 au PGD (4.9) vérifié par $\mathbf{Y}_N$ pour obtenir le résultat attendu.

$\blacksquare$

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic, 1978.

[2] E. Bolthausen and J.-D. Deuschel, *Critical large deviations for gaussian fields in the phase transition regime*, The Annals of Probability **21** (1993), 1876–1920.

[3] F. Comets, *Grandes déviations pour les champs de gibbs sur* $\mathbb{Z}^d$, C. R. Acad. Sci. Paris **303** (1986), 511–513.

[4] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large deviations thechniques and applications*, Jones and Barlett, 1993.

[5] D. Deuschel, J.-D. Strook and H. Zessin, *Microcanonical distribution for lattice gases*, Commun. Math. Phys. **139** (1991), 83–101.

[6] J.D. Deuschel and D. Strook, *Large deviations*, Academic, 1989.

[7] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, *Larges deviations for stationary gaussian processes*, Comm. Math. Phys. **97** (1985), 187–210.

[8] H.O. Georgii, *Gibbs mesures and phase transitions*, De Gruyter, 1988.

[9] H.R. Künsch, *Thermodynamics and statistical analysis of gaussian random fields*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **58** (1981), 407–421.

[10] S. Kusuoka, *The variational principle for stationary gaussian markov fields*, Theory and application of random fields, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 49, Springer, 1983, pp. 179–187.

[11] G.F. Lawler, *Intersections of random walks*, Birkhäuser, 1991.

[12] Y.A. Rozanov, *On gaussian fields with given conditional distributions*, Theory Probab. Appl. **12** (1967), 381–391.

[13] F. Spitzer, *Principles of random walk*, Springer, 1976.

Ce mémoire a été composé grâce à (entre autres)

TeX
LaTeX 2$_\varepsilon$
METAFONT
$\mathcal{AMS}$-LaTeX
MikTeX
Babel
mapcodes