Dimension d'entropie, d'après Guionnet et Shlyakhtenko

Djalil Chafaï
http://djalil.chafai.net/

Notes brouillonnes – 15 Décembre 2008
Compilé le 22 décembre 2008

Résumé

Cet exposé est un compte rendu tout à fait libre d'un exposé d'Alice Guionnet donné aux journées Franco-Chinoises organisées par Yves Lejan et Dominique Bakry, qui ont eu lieu au CIRM, à Luminy, en septembre 2008. Il concerne un article de Guionnet et Shlyakhtenko [GS07] intitulé *On classical analogues of free entropy dimension*. Guionnet a sans doute choisi d'exposer ce travail publié en 2007 pendant ces journées car il met en jeu le critère *courbure-dimension* bien connu de Bakry et d'autres participants. Nous connaissons tous Alice Guionnet en France (ÉNS Lyon). Son co-auteur, Dimitri Shlyakhtenko (UCLA), est expert en théorie des opérateurs. Il a soutenu sa thèse en 1997 sous la direction de Dan-Virgil Voiculescu (Berkeley), le père de la théorie des probabilités libres. La motivation de [GS07] est l'étude d'un analogue, en théorie des probabilités classiques, de la notion de *dimension d'entropie libre* introduite en théorie des probabilités libres par Voiculescu dans [Voi94]. Par souci de simplicité, cet exposé, tout comme celui de Guionnet, se situe à un niveau élémentaire, dépourvu de probabilités libres. Pour les preuves, on se reportera à [GS07].

Table des matières

Les numéros des lemmes, propositions, théorèmes, exemples, et remarques sont identiques à ceux de [GS07]. Les démonstrations sont omises.

La dimension d'entropie apparaît comme une dimension fractale moyenne, mais aussi comme liée à la dimension et à la courbure du support de la mesure. La dimension d'entropie gouverne l'asymptotique en temps petit de l'information de Fisher du semi-groupe de la chaleur en temps petit (penser à un mouvement brownien partant d'une condition initiale fractale). Il serait intéressant de définir plus généralement la dimension d'entropie pour les espaces métriques mesures de Grigor'yan, ce qui permet d'englober ainsi le cas des semi-groupes de la chaleur sur les fractals.

1 Introduction

Soit μ une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}^d$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité p. Son *entropie* (de Boltzmann-Shannon) est

$$H(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} p(x)\log(p(x))\,dx. \tag{1}$$

- parler de l'obtention de l'entropie discrète via l'asymptotique d'un coefficient multinomial, et de l'interprétation en physique statistique (Boltzmann) et en informatique (codage, théorie de l'information, Shannon)
- lorsque $p\log(p)$ n'est pas Lebesgue intégrable, on pose $H(\mu) = +\infty$, de sorte que $H(\mu)$ prend ses valeurs dans $(-\infty, +\infty]$
- si μ a une entropie finie et possède une matrice de covariance K alors

  $$H(\mu) \geq -(1/2)\log((2\pi e)^d \det(K))$$

  avec égalité ssi μ est gaussienne. On appelle entropie exponentielle de Shannon la quantité $N(\mu) = (2\pi e)^{-1}e^{-2H(X)/d}$, de sorte que $N(\mu) = \det(K)^{1/d}$ si μ est gaussienne de covariance K
- si $\mu = \mathcal{U}_C$ est la loi uniforme sur un pavé C de $\mathbb{R}^d$ de volume $\lambda(C)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue alors $H(\mu) = -\log\lambda(C)$ et μ maximise H parmi l'ensemble des mesures de probabilités d'entropie finie et à support dans C
- $H(\mu)$ prend ses valeurs dans l'intégralité de l'intervalle $(-\infty, +\infty]$ car si $D_\alpha : x \mapsto \alpha x$ est la dilatation de facteur α alors $H(D_\alpha^*\mu) = H(\mu) + d\log(\alpha)$
- si ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue avec $H(\nu) < \infty$ alors $H(\mu * \nu) \leq H(\nu)$ pour toute mesure de probabilité μ. La convolution réduit l'entropie quand celle-ci est finie. Ceci est une conséquence de l'inégalité de l'entropie exponentielle de Shannon : $N(X+Y) \geq N(X)+N(Y)$ pour tous vecteurs aléatoires X et Y de $\mathbb{R}^d$ à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, avec égalité ssi X et Y sont gaussiens et de covariances proportionnelles

Pour tout $t > 0$ on pose

$$\mu_t = \mu * \mathcal{N}(0, t^2 I_d) = \mu * D_t^*\mathcal{N}(0, I_d).$$

On définit la *dimension d'entropie* de μ par :

$$\delta_c(\mu) = d - \liminf_{t\to 0^+} \frac{H(\mu_t)}{|\log(t)|} \tag{2}$$

Si $H(\mu_t)$ converge vers un nombre fini quand $t \to 0$ alors $\delta_c(\mu) = d$. C'est le cas si μ est gaussienne de variance non-nulle. La quantité $\delta_c(\mu)$ devient intéressante lorsque $H(\mu_t)$ ne converge pas vers un nombre fini quand $t \to 0$. Attention, bien que μ_t converge faiblement vers μ lorsque $t \to 0$, la convergence de $H(\mu_t)$ vers $H(\mu)$ n'est pas automatique, et la finitude de $H(\mu)$ ne suffit pas a priori.

Dans la suite, la plupart des résultats sont en dimension $d = 1$ mais restent valables pour $d > 1$. Des exemples de calcul de $\delta_c(\mu)$ sont donnés dans l'exemple 3.3 page 4.

2 Définitions équivalentes de la dimension d'entropie

Le but de cette section est d'établir que dans la définition de $\delta_c(\mu)$, la loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, I_d)$ peut être remplacée par une loi quelconque ν d'entropie finie, sous une hypothèse d'intégrabilité sur μ et ν. De plus, sous les mêmes hypothèses, on obtient que

$$0 \leq \delta_c(\mu) \leq d.$$

Pour faire simple, nous allons nous restreindre au cas unidimensionnel : $d = 1$.

Lemme 2.1. *Soit ν une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{R}$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$ on pose $\mu_t = \mu * \nu_t$ où $\nu_t = D_t^* \nu$ et où $D_t : x \in \mathbb{R} \mapsto tx \in \mathbb{R}$ est la dilatation de facteur t.*

1. *Pour toute constante $\alpha > 0$ on a*

$$\liminf_{t \to 0} \frac{H(\alpha\mu_t)}{\log(t)} = \alpha \liminf_{t \to 0} \frac{H(\mu_t)}{|\log(t)|}.$$

2. *Supposons que $\delta = \nu(\mathbb{R}) < \infty$. Si $x \mapsto \log(1 + |x|)$ est μ et ν intégrable alors*

$$0 \leq \liminf_{t \to 0} \frac{H(\mu_t)}{|\log(t)|}.$$

D'autre part, si $H(\nu) < \infty$ alors

$$\liminf_{t \to 0} \frac{H(\mu_t)}{|\log(t)|} \leq \limsup_{t \to 0} \frac{H(\mu_t)}{|\log(t)|} \leq \delta.$$

Lemme 2.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme un mélange fini $\mu = p_1\mu_1 + \cdots + p_n\mu_n$ de mesures de probabilités $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Si ν est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que $H(\nu) < \infty$, alors*

$$\liminf_{t \to 0} \frac{H(\mu * \nu_t)}{|\log(t)|} = \liminf_{t \to 0} \frac{1}{|\log(t)|} \sum_{i=1}^{n} p_i H(\mu_i * \nu_t).$$

Comme $H(\nu) < \infty$, la somme du membre de droite est bien définie car $H(\mu_i * \nu_t) \leq |\log(t)|$ pour tout $1 \leq i \leq n$ en vertu du lemme précédent.

Corollaire 2.3. *Soit $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ telles que la limite inférieure dans la définition de leur δ_c est une limite. Alors pour toute combinaison linéaire convexe $\mu = p_1\mu_1 + \cdots + p_n\mu_n$ on a $\delta_c(\mu) = p_1\delta_c(\mu_1) + \cdots + p_n\delta_n(\mu_n)$. Cette propriété ne subsiste pas dans un cadre non–commutatif (probabilités libres).*

Lemme 2.4. *Si ν est une mélange fini de la forme $\nu = p_1\nu_1 + \cdots + p_n\nu_n$ avec $H(\nu_i) < \infty$ pour tout $1 \leq i \leq n$ alors*

$$\liminf_{t \to 0} \frac{H(\mu * \nu_t)}{|\log(t)|} = \liminf_{t \to 0} \sum_{i=1}^{n} p_i H(\mu * \nu_{i,t}).$$

Corollaire 2.5. *Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et μ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe M assez grand tel que*

$$\left| \liminf_{t\to 0} \frac{H(\mu * \nu_t)}{|\log(t)|} - \liminf_{t\to 0} \frac{H(\mu_M * \nu_{M,t})}{|\log(t)|} \right| \leq \varepsilon$$

où μ_M et ν_M sont les restrictions renormalisées de μ et ν sur l'intervalle $[-M, +M]$.

Lemme 2.6. *Plaçons-nous dans le cadre du lemme précédent. Supposons que la densité f de ν a un support E borné et que $|f - C| < \varepsilon$ sur E pour des constantes $C > \varepsilon > 0$. Si μ a également un support borné, alors, en notant ν' la restriction de ν à son support E,*

$$\left| \liminf_{t\to 0} \frac{H(\mu * \nu'_t)}{|\log(t)|} - \liminf_{t\to 0} \frac{H(\mu * \nu_t)}{|\log(t)|} \right| \leq \varepsilon\lambda(E).$$

Théorème 2.7. *Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que $H(\nu)$ est finie. Soit également μ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{U}$ la loi uniforme sur $[0,1]$. Si $x \mapsto \log(1+|x|)$ est μ et ν intégrable alors*

$$\liminf_{t\to 0} \frac{H(\mu * D_t^* \nu)}{|\log(t)|} = \liminf_{t\to 0} \frac{H(\mu * D_t^* \mathcal{U})}{|\log(t)|}.$$

En particulier, la limite (inférieure) est indépendante du choix de ν.

3 Lien avec dimension fractale

Théorème 3.1. *Soit μ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ et pour tout réels $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, soit*

$$d_t(x) = -\frac{\log(\mu([x - t/2, x + t/2]))}{|\log(t)|}.$$

Alors on a

$$\delta_c(\mu) = \limsup_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} d_t(y)\, d\mu(y).$$

Corollaire 3.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une fonction mesurable $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et des constantes C, c, t_0 strictement positives telles que pour tout x dans le support de μ et tout $0 < t < t_0$,*

$$ct^{\alpha(x)} \leq \mu([x - t/2, x + t/2]) \leq Ct^{\alpha(x)}.$$

Alors on a dans ce cas :

$$\delta_c(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)\, d\mu(x).$$

Exemple 3.3. *Voici trois exemples simples :*

1. *Soit un réel $0 < \alpha < 1$ et μ_α la mesure de probabilité de Cantor-Lebesgue (voir [WZ77, Page 35]) définie par*

   $$\mu_\alpha = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1}) * \frac{1}{2}(\delta_{-\lambda} + \delta_{+\lambda}) * \frac{1}{2}(\delta_{-\lambda^2} + \delta_{+\lambda^2}) * \cdots$$

   où $\lambda = 2^{-\alpha}$. Alors μ_α vérifie les hypothèses du corollaire précédent avec la fonction constante $\alpha(x) = \alpha$. En particulier, $\delta_c(\mu_\alpha) = \alpha$.

2. *Si $\mu = \delta_0$ (masse de Dirac) alors les hypothèses du corollaire précédent sont vérifiées avec la fonction identiquement nulle $\alpha \equiv 0$ sur le support de μ et donc $\delta_c(\mu) = 0$*
3. *Soit μ une mesure de probabilité absolument continue de densité de Lebesgue p. On a $\mu = \mu_M + \mu_M^\perp$ où $\mu_M = \mu|_{\{x:p(x)\leq M\}}$. De plus, $\mu_M^\perp(\mathbb{R}) \to 0$ quand $M \to \infty$. Par le tout premier lemme, on a $\lim_{M\to\infty} \delta_c(\mu_M^\perp) = 0$ et donc $\delta_c(\mu) = \lim_{M\to\infty}(\delta_c(\mu_M) + \delta_c(\mu_M^\perp)) = \lim_{M\to\infty} \delta_c(\mu_M)$. Comme $H(\mu_M) < \infty$, on obtient $H(\mu_M * \nu) \leq H(\mu_M)$ pour toute mesure de probabilité ν, en vertu de l'inégalité de l'entropie exponentielle de Shannon. Par conséquent, $\delta_c(\mu_M) = 1$ et donc $\delta_c(\mu) = 1$.*

Théorème 3.4. *Lien entre dimension d'entropie et cohomologie de groupe. Ce théorème est ignoré ici.*

La proposition suivante établit un lien entre la dimension d'entropie δ_c et des quantités similaires étudiées dans [BH02, FLR02].

Proposition 3.5. *Soit m une mesure de probabilité sur $[0,1)$ et $\ell > 1$ un entier. Posons*

$$h_{\ell,n}(m) = -\frac{1}{n\log(\ell)} \sum_{i=1}^{\ell^n - 1} m([i\ell^{-n}, (i+1)\ell^{-n})) \log(m([i\ell^{-n}, (i+1)\ell^{-n}]))$$

et

$$h_\ell^*(m) = \limsup_{n\to\infty} h_n(m).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose

$$X(\ell,\varepsilon,n) = \bigcup_k \left(\frac{(1-\varepsilon)(k+1)}{\ell^n}, \frac{(k+1)}{\ell^n} \right].$$

Alors on a

1. *si la limite supérieure dans la définition de $\delta_c(m)$ est atteinte le long de la suite $(\ell^{-n})_{n\geq 1}$ alors $h_\ell^*(m) \geq \delta_c(m)$*
2. *$h_\ell^*(m) \leq \delta_c(m) + \inf_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to\infty} m(X(\ell,\varepsilon,n))$*

Proposition 3.6. *Si la limite inférieure dans la définition de $\delta_c(\mu)$ est une limite alors $\delta_c(\mu) \leq \mathrm{Dim}^*(\mu) := \inf\{\mathrm{Dim}(E) : \mu(E) = 1\}$ (*packing dimension*).*

4 Lien avec information de Fisher et inégalité de Bochner

Soit η une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et de densité p. Son *information de Fisher* $F(\eta)$ est définie par

$$F(\eta) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x \log p(x)|^2 \, p(x) \, dx.$$

Pour tout réel $s \geq 0$, et toute mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$, on pose $P_s\mu = \mu_{\sqrt{s}} = \mu * \gamma_s$ où $\gamma_s = \nu_{\sqrt{s}} = \mathcal{N}(0, sI_d)$. Comme la convolution est régularisante, l'information de Fisher de $P_s\mu$ est bien définie dès que $s > 0$ même si μ n'est pas absolument continue. Notons que $(P_s)_{s\geq 0}$ n'est rien d'autre que l'adjoint du semi-groupe de la chaleur et que $P_s\mu$ est la loi au temps s d'un Brownien de covariance I_d de $\mathbb{R}^d$ issu d'une condition initiale de loi μ. Comme les mesures gaussiennes ont une entropie finie, on voit que $H(\mu_s)$ est finie pour tout $s > 0$ en vertu de l'inégalité exponentielle de Shannon. L'identité $\partial_s P_s \mu = \frac{1}{2}\Delta P_s \mu$ donne alors (de Bruijn):

$$\partial_s H(P_s\mu) = -\frac{1}{2}F(P_s\mu) \leq 0.$$

Cela montre en particulier que l'entropie diminue quand s augmente. D'autre part, on a

$$H(\mu_t) - H(\mu_1) = \frac{1}{2}\int_t^1 F(P_s\mu)\,ds$$

pour tout $0 \leq t \leq s$ (notons que $\mu_0 = \mu$). Comme $H(\mu_1)$ est toujours bornée, on a donc

$$\delta_c(\mu) = d - \liminf_{t\to 0} \frac{\int_t^1 F(P_s\mu)\,ds}{2|\log(\sqrt{t})|} = d - \liminf_{t\to 0} \frac{\int_t^1 F(P_s\mu)\,ds}{|\log(t)|}.$$

Notons que si p_s désigne la densité de $P_s\mu$ pour $s > 0$ alors

$$\nabla \log p_s(x) = \frac{1}{\sqrt{s}}\mathbb{E}(G|X + \sqrt{s}G = x)$$

où X et G sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives μ et $\mathcal{N}(0, I_d)$. La définition de $F(P_s\mu)$ combinée à l'inégalité de Jensen donne, toujours pour $s > 0$,

$$0 \leq F(P_s\mu) \leq \frac{d}{s}.$$

Ceci démontre à nouveau que

$$0 \leq \delta_c(\mu) \leq d.$$

Heuristiquement, la dimension d'entropie et l'information de Fisher sont liées par

$$F(P_t\mu) \approx_{t\to 0} \frac{1 - \delta_c(\mu)}{t}(1 + o(1)).$$

Cela permet de penser la dimension d'entropie $\delta_c(\mu)$ comme une quantité qui gouverne l'asymptotique en temps petit du semi-groupe de la chaleur avec condition initiale μ. Plus précisément, rappelons tout d'abord que

$$F(P_t\mu) = \sup_f \frac{(P_t\mu(\Delta f))^2}{P_t\mu(|\nabla f|^2)}$$

où le supremum, qui porte sur les fonctions f deux fois différentiables, est atteint en $f = \log p_t$. Par conséquent, on obtient

$$(P_t\mu(\Delta f))^2 \leq F(P_t\mu)\,|||\nabla f|||_\infty^2$$

et donc

$$\begin{aligned}
|P_t\mu(f) - \mu(f)| &\leq \int_0^t |\partial_s P_s\mu(f)|\;ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t |P_s\mu(\Delta f)|\;ds \\
&\leq \frac{1}{2}\,|||\nabla f|||_\infty \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\delta_c(\mu)}{s}(1+o(1))\,ds} \\
&\leq |||\nabla f|||_\infty \sqrt{(1-\delta_c(\mu))t}\,(1 + o(1)).
\end{aligned}$$

En étendant cette inégalité aux fonctions f Lipschitz, on obtient finalement

$$d(P_t\mu, \mu) := \sup_{\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1} |P_t\mu(f) - \mu(f)| \leq \sqrt{(1 - \delta_c(\mu))t}\,(1 + o(1)).$$

Cette relation entre la dimension d'entropie $\delta_c(\mu)$ et l'asymptotique en temps petit du semi-groupe de la chaleur $(P_t\mu)_{t\geq 0}$ est sans doute plus profonde que cette simple borne. Cette idée est poursuivie en introduisant une nouvelle définition de $\delta_c(\mu)$ basée sur des inégalités de courbure-dimension (ou de Bochner, ou de Bakry), dont on connaît par ailleurs le rôle pour les asymptotiques en temps petit des semi-groupes de la chaleur sur les variétés riemanniennes.

Définition 4.1. *On dit qu'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ vérifie une inégalité de Bochner* $\mathrm{CD}_m(n, K)$ *pour un réel $n \geq 0$ et une fonction $K(\cdot, n)$ positive lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon' \leq \delta$ et toute fonction lisse f,*

$$P_{\varepsilon'}\mu(|\mathrm{Hess} f|^2) \geq \frac{1}{n}(P_{\varepsilon'}\mu(\Delta f))^2 - K(\varepsilon', n)P_{\varepsilon'}\mu(|\nabla f|^2).$$

Par la suite, dans les cas intéressants, on aura $K(\varepsilon', n) \to \infty$ quand $\varepsilon' \to 0$. Dans le premier terme du membre de droite, la moyenne est à l'intérieur du carré, ce qui fait que l'inégalité est plus faible qu'un critère de Bochner usuel pris en moyenne.

Définition 4.2. *La dimension* CD *d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ est définie par*

$$\delta^{\square}(\mu) := d - \inf_{\mu \text{ vérifie } \mathrm{CD}_m(n,K)} \left(\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_\varepsilon^1 K(y, n)\, dy}{\log(\varepsilon^{-1})} \right) n.$$

L'infimum porte sur les couples $(n, K(\cdot, n))$ tels que μ vérifie $\mathrm{CD}_m(n, K)$*.*

Lemme 4.3. *Pour toute mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ on a $\delta^{\square}(\mu) \leq \delta_c(\mu)$.*

Proposition 4.4. *Si une mesure de probabilité vérifie une inégalité* $\mathrm{CD}_m(n, K)$ *alors*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} (\log \varepsilon^{-1})^{-1} \int_\varepsilon^1 F(P_s\mu)\, ds \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \left[(\log \varepsilon^{-1})^{-1} \int_\varepsilon^1 K(s, n) ds + 1 \right] n.$$

Théorème 4.5. *Pour toute mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$, on a $\delta^{\square}(\mu) = \delta_c(\mu)$. En particulier, $\delta^{\square}$ est invariante par déformations bi-Lipschitz, cf. section suivante.*

Proposition 4.6. *Pour toute mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$,*

$$\delta_c(\mu) = \delta^{\square}(\mu) \geq 1 - \inf_{h \in \mathcal{F}_\mu} \mu((1 - h)^2)$$

où $\mathcal{F}_\mu$ désigne l'ensemble des fonctions continues telles que

$$\liminf_{\delta \to \infty} (\log \delta^{-1})^{-1} \int_\delta^1 F_h(P_s\mu)\, ds = 0$$

et

$$F_h(\eta) = 2 \sup_f \left\{ \mu(h\Delta f) - \frac{1}{2}\mu(|\nabla f|^2) \right\}.$$

5 Invariance par déformations bi-Lipschitz

Théorème 5.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bi-Lipschitz, c'est-à-dire que pour des constantes $m, M > 0$ et tous réels x, y,*

$$m|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Si $\eta = f^*\mu$ désigne la mesure image de μ par f alors

$$\delta_c(\mu) = \delta_c(\eta).$$

Rappelons que la dimension d'entropie $\delta_c(\mu)$ apparaît comme une dimension fractale moyenne. Or un ensemble de Cantor est homéomorphe à un ensemble dont la dimension fractale est différente. Par conséquent, il n'est sans doute pas possible d'affaiblir grandement les hypothèses sur la déformation f dans le théorème précédent.

6 Inégalité de Bochner non-commutative

Cette section est ignorée.

Références

[BH02] A. Batakis et Y. Heurteaux – « On relations between entropy and Hausdorff dimension of measures », *Asian J. Math.* **6** (2002), no. 3, p. 399–408. 3

[Fal03] K. Falconer – *Fractal geometry*, second éd., John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, 2003, Mathematical foundations and applications. 6

[FLR02] A.-H. Fan, K.-S. Lau et H. Rao – « Relationships between different dimensions of a measure », *Monatsh. Math.* **135** (2002), no. 3, p. 191–201. 3

[GS07] A. Guionnet et D. Shlyakhtenko – « On classical analogues of free entropy dimension », *J. Funct. Anal.* **251** (2007), no. 2, p. 738–771. (document)

[Mat95] P. Mattila – *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Fractals and rectifiability. 6

[Voi94] D. Voiculescu – « The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. II », *Invent. Math.* **118** (1994), no. 3, p. 411–440. (document)

[WZ77] R. L. Wheeden et A. Zygmund – *Measure and integral*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977, An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43. 1

`Compiled 22 décembre 2008.`

Pour les bases sur les fractals, cf. [Fal03] ou [Mat95].