Processus de Hawkes en grande dimension

avec S. Delattre et M. Hoffmann

Modèle général

$G = (S, E)$ un graphe orienté.

Z_t^i =nombre d'actions effectuées par l'individu $i \in S$.

Pout tout $i \in S$, Z^i saute, à l'instant $t \geq 0$, "indépendamment" des autres, avec taux

$$h_i\Big(\sum_{j \to i} \int_0^{t-} \varphi_{ji}(t-s)dZ_s^j\Big)$$

avec

$$h_i : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ \quad \text{(plutôt croissante)}$$

et

$$\varphi_{ji} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ \quad \text{(plutôt décroissante).}$$

Représentation en EDS

On considère une famille de mesures de Poisson indépendantes $\pi^i(ds, dz)$ sur $[0, \infty) \times [0, \infty)$ d'intensité $dsdz$, et la famille d'EDS

$$\forall\, i \in S, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \leq h_i(\sum_{j \to i} \int_0^{s-} \varphi_{ji}(s-u) dZ_u^j)\}} \pi^i(ds, dz)$$

Représentation en EDS

On considère une famille de mesures de Poisson indépendantes $\pi^i(ds, dz)$ sur $[0, \infty) \times [0, \infty)$ d'intensité $dsdz$, et la famille d'EDS

$$\forall\, i \in S, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \leq h_i(\sum_{j \to i} \int_0^{s-} \varphi_{ji}(s-u) dZ_u^j)\}} \pi^i(ds, dz)$$

Cette représentation est équivalente à celle en termes de compensateurs. Voir Jacod, Brémaud-Massoulié, et la preuve complète de Chevallier.

Représentation en EDS

On considère une famille de mesures de Poisson indépendantes $\pi^i(ds, dz)$ sur $[0, \infty) \times [0, \infty)$ d'intensité $dsdz$, et la famille d'EDS

$$\forall\ i \in S, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le h_i(\sum_{j \to i} \int_0^{s-} \varphi_{ji}(s-u) dZ_u^j)\}} \pi^i(ds, dz)$$

On suppose que

(a) le graphe est de degré borné (e.g. un graphe fini ou $\mathbb{Z}^d$),
(b) $\varphi_{ji} \le \varphi \in L^1_{loc}([0, \infty))$,
(c) les h_i sont uniformément Lipschitz et à croissance au plus linéaire.

Alors on a existence et unicité trajectorielle d'une solution $(Z_t^i)_{t \ge 0, i \in S}$ telle que $\sum_{i \in S} 2^{-|i|} \mathbb{E}[Z_t^i]$ soit localement borné.

Représentation en EDS

On considère une famille de mesures de Poisson indépendantes $\pi^i(ds, dz)$ sur $[0, \infty) \times [0, \infty)$ d'intensité $dsdz$, et la famille d'EDS

$$\forall\, i \in S, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le h_i(\sum_{j\to i} \int_0^{s-} \varphi_{ji}(s-u)dZ_u^j)\}} \pi^i(ds, dz)$$

On suppose que

(a) le graphe est de degré borné (e.g. un graphe fini ou $\mathbb{Z}^d$),
(b) $\varphi_{ji} \le \varphi \in L^1_{loc}([0, \infty))$,
(c) les h_i sont uniformément Lipschitz et à croissance au plus linéaire.

Alors on a existence et unicité trajectorielle d'une solution $(Z_t^i)_{t\ge 0, i\in S}$ telle que $\sum_{i\in S} 2^{-|i|}\mathbb{E}[Z_t^i]$ soit localement borné.

On peut faire sensiblement plus général. Par exemple, OK sur $\mathbb{Z}^d$ si $h_i(x) = h(x)$ Lipschitz et si $\varphi_{ij}(t) = \epsilon(|i-j|)\varphi(t)$ avec $\varphi \in L^1_{loc}$ et ϵ à décroissance géométrique.

Représentation en EDS

On considère une famille de mesures de Poisson indépendantes $\pi^i(ds, dz)$ sur $[0, \infty) \times [0, \infty)$ d'intensité $dsdz$, et la famille d'EDS

$$\forall\, i \in S, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \leq h_i(\sum_{j \to i} \int_0^{s-} \varphi_{ji}(s-u) dZ_u^j)\}} \pi^i(ds, dz)$$

On suppose que

(a) le graphe est de degré borné (e.g. un graphe fini ou $\mathbb{Z}^d$),
(b) $\varphi_{ji} \leq \varphi \in L^1_{loc}([0, \infty))$,
(c) les h_i sont uniformément Lipschitz et à croissance au plus linéaire.

Alors on a existence et unicité trajectorielle d'une solution $(Z_t^i)_{t \geq 0, i \in S}$ telle que $\sum_{i \in S} 2^{-|i|} \mathbb{E}[Z_t^i]$ soit localement borné.

Pas d'unicité sans condition (?) (condition assez faible).

Représentation en EDS

On considère une famille de mesures de Poisson indépendantes $\pi^i(ds, dz)$ sur $[0, \infty) \times [0, \infty)$ d'intensité $dsdz$, et la famille d'EDS

$$\forall\, i \in S, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le h_i(\sum_{j \to i} \int_0^{s-} \varphi_{ji}(s-u) dZ_u^j)\}} \pi^i(ds, dz)$$

On suppose que

(a) le graphe est de degré borné (e.g. un graphe fini ou $\mathbb{Z}^d$),
(b) $\varphi_{ji} \le \varphi \in L^1_{loc}([0, \infty))$,
(c) les h_i sont uniformément Lipschitz et à croissance au plus linéaire.

Alors on a existence et unicité trajectorielle d'une solution $(Z_t^i)_{t \ge 0, i \in S}$ telle que $\sum_{i \in S} 2^{-|i|} \mathbb{E}[Z_t^i]$ soit localement borné.

Si $G = \mathbb{Z}^d$ aux plus proches voisins avec $\varphi_{ji} = 1$, $h_i(x) = 1 + x$, pas de construction graphique possible, même en dimension 1.

Preuve: unicité par Grönwall, existence par Picard. Soit Z^i et $\tilde{Z}^i$ deux solutions. Un calcul direct montre que

$$\mathbb{E}[\int_0^t |d(Z^i - \tilde{Z}^i)_s|] \leq C \int_0^t \varphi(t-s) \sum_{j \to i} \mathbb{E}[\int_0^s |d(Z^j - \tilde{Z}^j)_u|] ds.$$

Puis,

$$\begin{aligned} u(t) :=& \sum_{i \in S} 2^{-|i|} \mathbb{E}[\int_0^t |d(Z^i - \tilde{Z}^i)_s|] \\ \leq& C \int_0^t \varphi(t-s) \sum_{i \in S} 2^{-|i|} \sum_{j \to i} \mathbb{E}[\int_0^s |d(Z^j - \tilde{Z}^j)_u|] ds. \end{aligned}$$

Preuve: unicité par Grönwall, existence par Picard. Soit Z^i et $\tilde{Z}^i$ deux solutions. Un calcul direct montre que

$$\mathbb{E}[\int_0^t |d(Z^i - \tilde{Z}^i)_s|] \leq C \int_0^t \varphi(t-s) \sum_{j\to i} \mathbb{E}[\int_0^s |d(Z^j - \tilde{Z}^j)_u|]ds.$$

Puis,

$$\begin{aligned} u(t) :=& \sum_{i\in S} 2^{-|i|}\mathbb{E}[\int_0^t |d(Z^i - \tilde{Z}^i)_s|] \\ \leq& C \int_0^t \varphi(t-s) \sum_{i\in S} 2^{-|i|} \sum_{j\to i} \mathbb{E}[\int_0^s |d(Z^j - \tilde{Z}^j)_u|]ds. \end{aligned}$$

Mais graphe de degré borné implique

$$\sum_{i\in S} 2^{-|i|} \sum_{j\to i} \mathbb{E}[\int_0^s |d(Z^j - \tilde{Z}^j)_u|] \leq C \sum_{i\in S} 2^{-|i|}\mathbb{E}[\int_0^s |d(Z^i - \tilde{Z}^i)_u|] = Cu(s).$$

Enfin,

$$u(t) \leq C \int_0^t \varphi(t-s)u(s)ds.$$

On conclut avec Grönwall, comme $\varphi \in L^1_{loc}$, que

$$u(t) = 0,$$

id est

$$\sum_{i \in S} 2^{-|i|} \mathbb{E}[\int_0^t |d(Z^i - \tilde{Z}^i)_s|] = 0$$

et donc $Z = \tilde{Z}$.

Champ moyen

On suppose que G est le graphe fini $\{1, \ldots, N\}$ complet et que toutes les interactions sont similaires: on a N individus identiques qui interagissent identiquement. Pour tout $i = 1, \ldots, N$,

$$Z_t^{i,N} = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \leq h(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^{j,N})\}} \pi^i(ds, dz).$$

Champ moyen

On suppose que G est le graphe fini $\{1, \ldots, N\}$ complet et que toutes les interactions sont similaires: on a N individus identiques qui interagissent identiquement. Pour tout $i = 1, \ldots, N$,

$$Z_t^{i,N} = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \leq h(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^{j,N})\}} \pi^i(ds, dz).$$

On introduit l'équation limite

$$\overline{Z}_t = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \leq h(\int_0^{s-} \varphi(s-u) d\mathbb{E}[\overline{Z}_u])\}} \pi(ds, dz).$$

S'il existe, $\overline{Z}$ est un Poisson inhomogène.

On suppose $\varphi \in L^2_{loc}$ et h Lipschitz.

1. L'équation limite est bien posée.
2. Pour tout k fixé, quand $N \to \infty$,

$$\mathcal{L}((Z_t^{1,N}, \ldots, Z_t^{k,N})_{t\in[0,T]}) \to \mathcal{L}((\overline{Z}_t)_{t\in[0,T]})^{\otimes k}$$

avec une vitesse en $kC_T N^{-1/2}$.

Preuve par couplage (très facile !), calculs similaires à l'unicité, plus terme d'erreur qui est bien sûr en $1/\sqrt{N}$.

On suppose $\varphi \in L^2_{loc}$ et h Lipschitz.

1. L'équation limite est bien posée.
2. Pour tout k fixé, quand $N \to \infty$,

$$\mathcal{L}((Z_t^{1,N}, \dots, Z_t^{k,N})_{t\in[0,T]}) \to \mathcal{L}((\overline{Z}_t)_{t\in[0,T]})^{\otimes k}$$

avec une vitesse en $kC_T N^{-1/2}$.

Preuve par couplage (très facile !), calculs similaires à l'unicité, plus terme d'erreur qui est bien sûr en $1/\sqrt{N}$.

Et $C_T \simeq E[\overline{Z}_T]$ quand tout va bien. Par ex., si $h(x) = \mu + x$, on a

(a) cas sous-critique: $\int_0^\infty \varphi < 1$, alors $C_T = CT$ et $E[\overline{Z}_T] \sim a_0 T$,

(b) cas sur-critique, $\varphi(t) = \alpha e^{-\beta t}$ avec $\alpha > \beta > 0$, $C_T = Ce^{(\alpha-\beta)T}$ et $E[\overline{Z}_T] \sim a_0 e^{(\alpha-\beta)T}$.

Champ moyen, $(t, N) \to (\infty, \infty)$

Cas linéaire: $h(x) = \mu + x$, et on regarde toujours : $\forall\, i = 1, \ldots, N$,

$$Z_t^{i,N} = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \leq \mu + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^{j,N}\}} \pi^i(ds, dz),$$

le $\overline{Z}_t$ associé, et on pose $m_t = \mathbb{E}[\overline{Z}_t]$ ($\pm$ explicite si φ explicite).

Champ moyen, $(t, N) \to (\infty, \infty)$

Cas linéaire: $h(x) = \mu + x$, et on regarde toujours : $\forall\, i = 1, \dots, N$,

$$Z_t^{i,N} = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le \mu + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^{j,N}\}} \pi^i(ds, dz),$$

le $\overline{Z}_t$ associé, et on pose $m_t = \mathbb{E}[\overline{Z}_t]$ ($\pm$ explicite si φ explicite).

1. La LGN est toujours OK (hypothèses sur φ) : en proba,

$$\frac{Z_t^{i,N}}{m_t} \longrightarrow 1 \quad \text{quand } (t, N) \to (\infty, \infty).$$

Peut-être lié au fait que dans le cas linéaire, $\mathbb{E}[Z_t^{i,N}] = m_t$.

Champ moyen, $(t, N) \to (\infty, \infty)$

Cas linéaire: $h(x) = \mu + x$, et on regarde toujours : $\forall\, i = 1, \dots, N$,

$$Z_t^{i,N} = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le \mu + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^{j,N}\}} \pi^i(ds, dz),$$

le $\overline{Z}_t$ associé, et on pose $m_t = \mathbb{E}[\overline{Z}_t]$ ($\pm$ explicite si φ explicite).

2. Dans le cas sous-critique $\int_0^\infty \varphi(s) ds < 1$, on a $m_t \sim a_0 t$ et pour k fixé, quand $(t, N) \to (\infty, \infty)$,

$$\left(\sqrt{m_t} \Big(\frac{Z_t^{i,N}}{m_t} - 1 \Big) \right)_{i=1,\dots,k} \longrightarrow \mathcal{N}(0, I_k).$$

Champ moyen, $(t, N) \to (\infty, \infty)$

Cas linéaire: $h(x) = \mu + x$, et on regarde toujours : $\forall\, i = 1, \ldots, N$,

$$Z_t^{i,N} = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \leq \mu + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^{j,N}\}} \pi^i(ds, dz),$$

le $\overline{Z}_t$ associé, et on pose $m_t = \mathbb{E}[\overline{Z}_t]$ ($\pm$ explicite si φ explicite).

3. Dans le cas sur-critique $\int_0^\infty \varphi(s)ds > 1$ (+ hyp tech sur φ), on a $m_t \sim a_0 e^{\alpha_0 t}$ et pour k fixé, quand $(t, N) \to (\infty, \infty)$,

$$(a) \quad \left(\sqrt{m_t}\Big(\frac{Z_t^{i,N}}{m_t} - 1\Big)\right)_{i=1,\ldots,k} \longrightarrow \mathcal{N}(0, I_k) \quad \text{si } m_t << N;$$

$$(b) \quad \left(\sqrt{N}\Big(\frac{Z_t^{i,N}}{m_t} - 1\Big)\right)_{i=1,\ldots,k} \longrightarrow (X, \ldots, X) \quad \text{si } m_t >> N.$$

(avec $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$).

Modèle au plus proche voisin

$G = \mathbb{Z}^d$, $i \sim j$ si $i = j$ ou si i voisin de j, cas linéaire avec des μ_i bornés:

$$\forall\, i \in \mathbb{Z}^d, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le \mu_i + (2d+1)^{-1} \sum_{j \sim i} \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^j\}} \pi^i(ds, dz).$$

Modèle au plus proche voisin

$G = \mathbb{Z}^d$, $i \sim j$ si $i = j$ ou si i voisin de j, cas linéaire avec des μ_i bornés:

$$\forall\, i \in \mathbb{Z}^d, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le \mu_i + (2d+1)^{-1} \sum_{j \sim i} \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^j\}} \pi^i(ds, dz).$$

1. Dans le cas sous-critique $\Lambda = \int_0^\infty \varphi(s)ds < 1$, quand $t \to \infty$,

$$\frac{Z_t^i}{t} \longrightarrow \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} Q_\Lambda(i,j)\mu_j$$

avec $Q_\Lambda = \sum_{n \ge 0} \Lambda^n A^n$ avec $A(i,j) = (2d+1)^{-1} \mathbf{1}_{\{i \sim j\}}$.

On n'oublie pas les μ_i. La vitesse de croissance de Z_t^i dépend d'une moyenne des μ_j autour de i.

Modèle au plus proche voisin

$G = \mathbb{Z}^d$, $i \sim j$ si $i = j$ ou si i voisin de j, cas linéaire avec des μ_i bornés:

$$\forall\, i \in \mathbb{Z}^d, \quad Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le \mu_i + (2d+1)^{-1} \sum_{j \sim i} \int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^j\}} \pi^i(ds, dz).$$

2. Dans le cas sur-critique $\int_0^\infty \varphi(s) ds > 1$ (+ hyp tech sur φ), on a

$$e^{-\alpha_0 t} Z_t^i \longrightarrow a_0 \bar{\mu}.$$

Tout est plat. On ne garde des μ_i qu'une valeur moyenne $\bar{\mu}$. Pas de LGN en dimension finie en surcritique (limite aléatoire). Donc le "tout plat" est dû aux interactions et la limite déterministe est due à la dimension infinie.

Impulsion

$G = \mathbb{Z}^d$, $i \sim j$ si $i = j$ ou si i voisin de j, cas linéaire avec des $\mu_i = 0$, mais **un saut forcé** au site $i = 0$ au temps $t = 0$: $\forall\, i \in \mathbb{Z}^d$,

$$Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le (2d+1)^{-1} \sum_{j \sim i} [\int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^j + \varphi(s) \mathbf{1}_{\{j=0\}}]\}} \pi^i(ds, dz).$$

Impulsion

$G = \mathbb{Z}^d$, $i \sim j$ si $i = j$ ou si i voisin de j, cas linéaire avec des $\mu_i = 0$, mais **un saut forcé** au site $i = 0$ au temps $t = 0$: $\forall\, i \in \mathbb{Z}^d$,

$$Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le (2d+1)^{-1} \sum_{j \sim i} [\int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^j + \varphi(s) \mathbf{1}_{\{j=0\}}]\}} \pi^i(ds, dz).$$

1. On voit que $Z_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} Z_t^i$ est un Hawkes de dim 1 (avec une impulsion). Du coup, on a gratuitement que

(a) si $\int_0^\infty \varphi = \infty$, p.s. pas d'extinction,
(b) si $\int_0^\infty \varphi \in (1, \infty)$, proba d'extinction explicite et dans $(0, 1)$,
(c) si $\int_0^\infty \varphi \le 1$, p.s. extinction.

Impulsion

$G = \mathbb{Z}^d$, $i \sim j$ si $i = j$ ou si i voisin de j, cas linéaire avec des $\mu_i = 0$, mais **un saut forcé** au site $i = 0$ au temps $t = 0$: $\forall\, i \in \mathbb{Z}^d$,

$$Z_t^i = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le (2d+1)^{-1} \sum_{j \sim i} [\int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^j + \varphi(s) \mathbf{1}_{\{j=0\}}]\}} \pi^i(ds, dz).$$

2. On suppose maintenant $\varphi(t) = ae^{-bt}$ avec $a > b > 0$ (surcritique). Il existe une v.a. $H \ge 0$, st. positive sur l'évenement *non extinction*, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, quand $t \to \infty$,

$$Z_t^{\lfloor x\sqrt{t} \rfloor} \sim He^{-\kappa|x|^2} t^{-d/2} e^{\alpha_0 t}.$$

Pour t grand, $(Z_t^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ ressemble à un profil gaussien, de largeur $\sqrt{t}$, et de hauteur $Ht^{-d/2}e^{\alpha_0 t}$.

Doit être vrai pour tout φ "raisonnable", mais difficile.
Propagation spatiale en $\sqrt{t}$, assez surprenant, vu que croissance exponentielle en t. La gaussienne en x sort de la marche aléatoire.
Site le plus loin?