Des processus semi-markoviens aux PDMP

Christiane Cocozza-Thivent

christiane.cocozza@univ-mlv.fr

Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
UMR CNRS 8050

Marne-la-Vallée, 26 mars 2012

Plan

Ouvrages de base

Deux ouvrages de base sur les PDMP :

- M.H.A. Davis, *Markov Models and Optimization*, Chapman & Hall, 1993
  - évolutions déterministes régies par des systèmes différentiels avec vitesses localement lipschitziennes,
  - existence de frontières qui déclenchent des sauts : les lois inter-arrivées sont les lois de minimum de v.a. avec densité et de constantes.
- M. Jacobsen *Point Process Theory and Applications, Marked Point Piecewise Deterministic Processes*, Birkhäuser, 2006
  - évolutions déterministes : flot markovien déterministe,
  - lois inter-arrivées avec densité.

Intérêt de la formulation de Jacobsen avec frontières : exemple du château d'eau

Un réservoir alimente un circuit hydraulique. Une pompe remplit le réservoir.

La pompe démarre (si elle n'est pas en panne !) seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{min}.

La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{max}.

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge. Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.

Intérêt de la formulation de Jacobsen avec frontières : exemple du château d'eau

Un réservoir alimente un circuit hydraulique. Une pompe remplit le réservoir.

La pompe démarre (si elle n'est pas en panne !) seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{min}.

La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{max}.

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge. Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.
Il faut donc bien distinguer les états "arrêt" et "marche",

Intérêt de la formulation de Jacobsen avec frontières : exemple du château d'eau

Un réservoir alimente un circuit hydraulique. Une pompe remplit le réservoir.

La pompe démarre (si elle n'est pas en panne !) seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{min}.

La transition "pompe à l'arrêt $\rightarrow$ pompe en marche" est déclenchée par l'atteinte du niveau h_{min}.

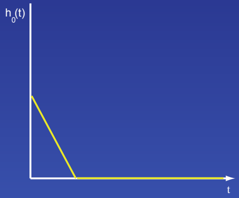
La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{max}.

La transition "pompe en marche $\rightarrow$ pompe à l'arrêt" est déclenchée par l'atteinte du niveau h_{max}.

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge. Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.
Il faut donc bien distinguer les états "arrêt" et "marche",

Intérêt de la formulation de Jacobsen avec frontières : exemple du château d'eau

La hauteur d'eau dans le réservoir doit être une composante du PDMP et lorsque la pompe est en panne son évolution n'est pas régie par une équation différentielle.



Dans la théorie développée par M. Jacobsen, les évolutions déterministes entre les sauts sont régies seulement par un flot markovien déterministe :

$$\phi(y, t+s) = \phi(\phi(y, s), t), \quad \phi(y, 0) = y$$

ce qui est le cas de l'exemple.

Intérêt de la formulation de Jacobsen avec frontières : exemple du château d'eau

On peut faire une modélisation en restant dans la formulation de Davis, mais il faut augmenter le nombre d'états ce qui est dommage, notamment pour la programmation.

A propos des lois inter-arrivées

Dans les cours classiques sur les processus semi-markoviens :

- ceux-ci sont à valeurs dans un espace fini ou dénombrable,
- les lois inter-arrivées sont tout à fait générales.

Dans les livres de M.H.A. Davis et de M. Jacobsen, les PDMP

- sont à valeurs dans un espace quelconque,
- les lois inter-arrivées sont particulières.

Que peut-on dire des PDMP à valeurs dans un espace général et avec des lois inter-arrivées quelconques ?

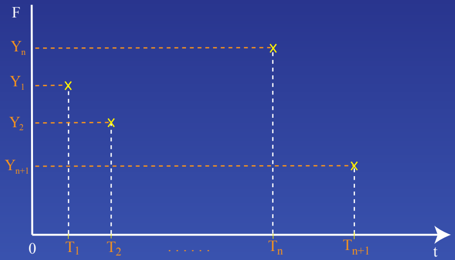
Plan

Processus semi-markovien complété (CSMP)

Partir d'un exemple facile, un processus semi-markovien complété (Completed Semi-Markov Process)

Processus semi-markovien complété (CSMP)

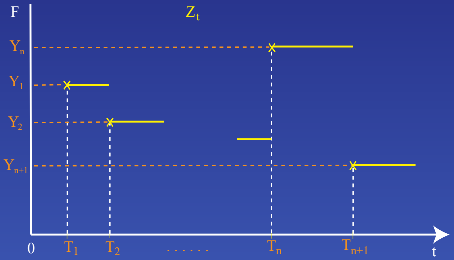
Partir d'un exemple facile, un processus semi-markovien complété (Completed Semi-Markov Process)



$(Y_n, T_n)_{n\geq 1}$ processus de renouvellement markovien : la loi de $(Y_{n+1}, T_{n+1} - T_n)$ sachant $(Y_1, T_1, \ldots Y_n, T_n)$ est $N(Y_n, dz, dv)$,

Processus semi-markovien complété (CSMP)

Partir d'un exemple facile, un processus semi-markovien complété (Completed Semi-Markov Process) : processus semi-markovien Z_t

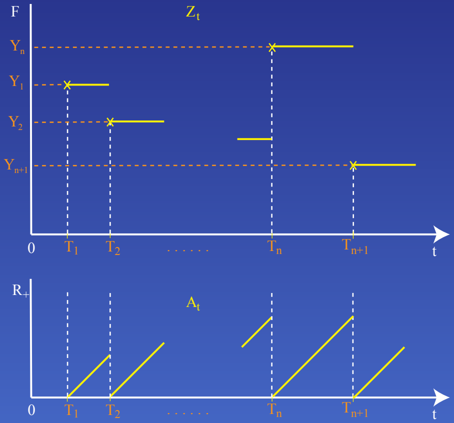


$(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$ processus de renouvellement markovien

$$Z_t = Y_n \quad si \;\; T_n \leq t < T_{n+1}$$

Processus semi-markovien complété (CSMP)

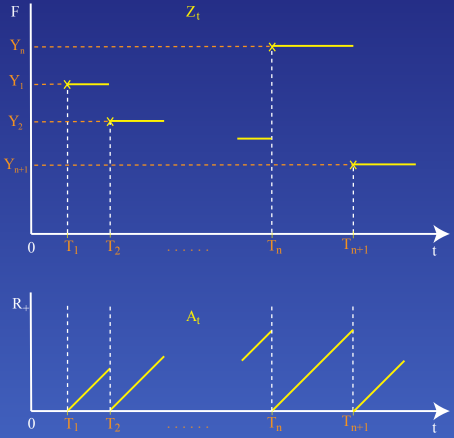
Partir d'un exemple facile, un processus semi-markovien complété (Completed Semi-Markov Process) : processus semi-markovien Z_t complété par la durée A_t



$$A_t = t - T_n \quad si \;\; T_n \leq t < T_{n+1}$$

Processus semi-markovien complété (CSMP)

Partir d'un exemple facile, le CSMP $(Z_t, A_t)_{t\geq 0}$



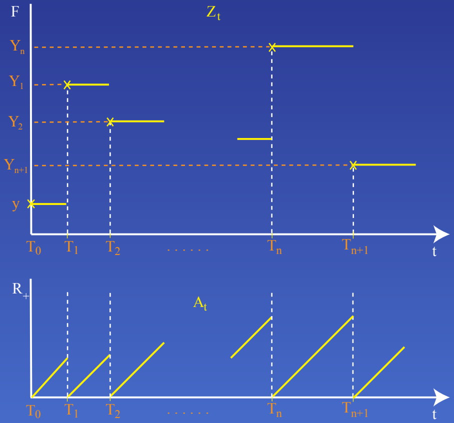
Loi de (Y_1, T_1) ?

Processus semi-markovien complété (CSMP)

Loi de (Y_1, T_1) ?

Une idée naturelle : prendre $N(y, dz, dv)$ pour un certain y et poser $Y_0 = y$, $T_0 = 0$, $Z_t = y$ et $A_t = t$ pour $t < T_1$

on dit qu'on travaille sous $\mathbb{P}_y$.

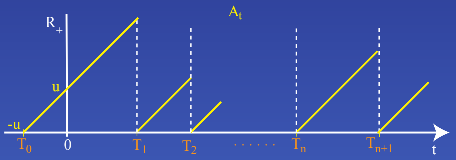


Processus semi-markovien complété (CSMP)

Sous $\mathbb{P}_y$ la loi de (Y_1, T_1) est $N(y, dz, dv)$.

Mais il faut se permettre des lois plus générales, de la forme $N_0^{y,u}$: on met T_0 en $-u$, on tire $(Y_1, T_1 - T_0)$ selon la loi $N(y, \cdot, \cdot)$ et on ne garde Y_1 et T_1 que si $T_1 > 0$, c'est-à-dire

$$N_0^{y,u} \text{ est la loi sous } \mathbb{P}_y \text{ de } (Y_1, T_1 - u) \text{ sachant } T_1 > u$$



Lorsque la loi de (Y_1, T_1) est $N_0^{y,u}$ on pose

$$Z_t = y, \quad A_t = u + t \quad si\ t < T_1$$

et on dit qu'on est sous $\mathbb{P}_{y,u}$.

Processus semi-markovien complété (CSMP)

Théorème

Si la loi de (Y_1, T_1) est de la forme $N_0^{y,u}$ ou un mélange de telles lois, le processus $(Z_t, A_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov.

Processus semi-markovien complété (CSMP)

Théorème

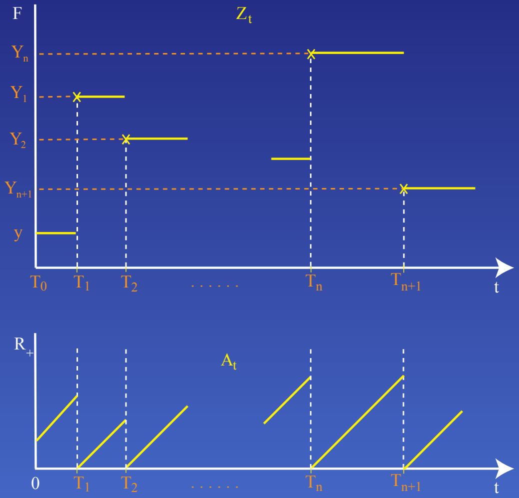
Si la loi de (Y_1, T_1) est de la forme $N_0^{y,u}$ ou un mélange de telles lois, le processus $(Z_t, A_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov.

On suppose dorénavant que pour tout y, $N(y, F \times \{0\}) = 0$.

D'où $N_0^{y,0} = N(y, \cdot)$ et $\mathbb{P}_{y,0} = \mathbb{P}_y$.

Des processus semi-markoviens complétés aux PDMP

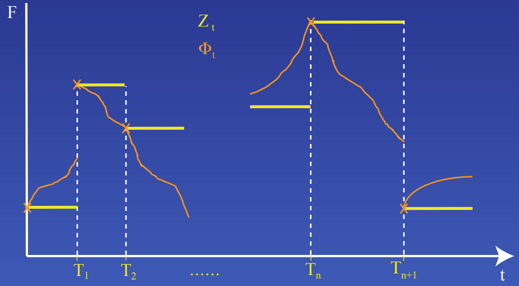
Partir d'un exemple facile, le CSMP $(Z_t, A_t)_{t\geq 0}$



Des processus semi-markoviens complétés aux PDMP

qui permet en fait d'obtenir des résultats sur les PDMP généraux

$$\begin{aligned} \Phi_t &= \phi(Y_n, t - T_n) \quad si \;\; T_n \leq t < T_{n+1} \\ &= \phi(Z_t, A_t) \end{aligned}$$



Pour que $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ soit un processus de Markov, il faut que ϕ et le noyau de renouvellement markovien N vérifient certaines conditions.

Des processus semi-markoviens complétés aux PDMP

Soit $\phi : F \to F \times \mathbb{R}_+$ cad-lag.

Théorème

On pose $\Phi_t = \phi(Z_t, A_t)$. On suppose que pour tous y, u, s, t :

$$\phi(y, s+t) = \phi(\phi(y,s), t), \quad \phi(y,0) = 0, \qquad N_0^{y,u} = N(\phi(y,u), \ \cdot\ ).$$

Alors le processus $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov, et la loi de Φ_t sachant $\Phi_0 = y_0$ est la loi de $\phi(Z_t, A_t)$ sous $\mathbb{P}_{y,u}$, y et u vérifiant $\phi(y,u) = y_0$, donc en particulier sous $\mathbb{P}_{y_0}$.

Plan

Motivation

Dans le cas d'un PDMP avec frontière, à valeurs dans F, de semi-groupe $\mathcal{P}_t$, on a

$$\mathcal{P}_t f = f + \int_0^t \mathcal{P}_s \mathcal{L} f \, ds$$

pour f qui vérifie :

- des conditions d'intégrabilité,
- pour tout $y \in F$, $u \to f \circ \phi(y, u)$ est dérivable (ou plus généralement absolument continue)
- "la condition frontière" :

$$\forall x \in \Gamma, \quad f(x) = \int_F f(z) \, Q(x, dz)$$

avec :

$$\mathcal{L}f(z) = \partial_2(f \circ \phi(z, 0)) + \int_F (f(z_1) - f(z)) \, b(z) \, Q(z, dz_1)$$

Motivation

condition gênante : pour écrire des algorithmes de simulation numérique pour le calcul des lois marginales du PDMP, Robert Eymard applique des méthodes de volume finis à une équation de transport de mesures qui opèrent sur des fonctions régulières mais sans restriction du type de (1).

Que devient

$$\mathcal{P}_t f = f + \int_0^t \mathcal{P}_s \mathcal{L} f \, ds$$

lorsque la condition frontière

$$f(x) = \int_F f(z) \, Q(x, dz) \quad \forall x \in \Gamma \tag{1}$$

n'est pas vérifiée par f ?

Dans le cas de lois inter-arrivées générales, que reste-t-il de $\mathcal{L}$?

Sans hypothèse sur les lois inter-arrivées

On note (P_t) le semi-groupe du processus semi-markovien complété

$$P_t\varphi(y,u) = \mathbb{E}_{y,u}(\varphi(Z_t, A_t)).$$

Théorème

On suppose que pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}_{y,u}(\sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}) < +\infty$. Soit φ une fonction mesurable définie sur $F \times \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $y \in F$ la fonction $t \to \varphi(y,t)$ soit absolument continue et telle que φ et $\partial_2\varphi$ soient bornées (pour simplifier l'exposé).

Alors $t \to P_t\varphi(y,u)$ est à variations bornées :

$$P_t\varphi(y,u) = \varphi(y,u) + \int_{]0,t]} (D_1^{y,u}\varphi)(dv).$$

Sans hypothèse sur les lois inter-arrivées

Plus précisément :

$$
\begin{aligned}
P_t\varphi(y,u) = {} & \mathbb{E}_{y,u}(\varphi(Z_t, A_t)) \\
= {} & \varphi(y,u) + \int_0^t P_v \partial_2 \varphi(y,u)\, dv \\
& + \int_{(F\times\mathbb{R}_+)^2} 1_{\{v+v_1\le t\}} \left(\varphi(z_1,0) - \varphi(z,v_1)\right) N(z, dz_1, dv_1)\, \rho^{y,u}(dz,dv) \\
& + \int_{F\times]0,t]} \left(\varphi(z,0) - \varphi(y,u+v)\right) N_0^{y,u}(dz,dv)
\end{aligned}
$$

$\rho^{y,u}$ est l'intensité du processus ponctuel marqué $(Y_n, T_n)_{n\ge 1}$ sous $\mathbb{P}_{y,u}$:

$$\int_{F\times\mathbb{R}_+} \varphi(z,v)\, \rho^{y,u}(dz,dv) = \sum_{n\ge 1} \mathbb{E}_{y,u}(\varphi(Y_n, T_n)\, 1_{\{T_n<+\infty\}}).$$

Lois inter-arrivées avec une partie absolument continue

On décompose $N(y, dz, dv) = dF_y(v)\,\beta(y, v; dz)$ qui est la loi de (Y_1, T_1) sous $\mathbb{P}_y$ en :

- dF_y = loi de T_1 sous $\mathbb{P}_y$,
- $\beta(y, v; dz)$ = loi de Y_1 sachant $\{T_1 = v\}$ sous $\mathbb{P}_y$.

et on suppose que les lois inter-arrivées dF_y ont une partie absolument continue. On les écrit :

$$dF_y(v) = \mathbb{P}_y(T_1 > v)\,\lambda(y, v)\,dv + \ldots.$$

donc :

$$N(y, dz, dv) = \mathbb{P}_y(T_1 > v)\,\lambda(y, v)\,\beta(y, v; dz)\,dv + n(y, dz, dv)$$

Lois inter-arrivées avec une partie absolument continue

Loi avec densité c'est l'écriture de la loi à l'aide du taux de hasard

$$dF_y(v) = e^{-\int_0^v \lambda(y,w)\,dw}\,\lambda(y,v)\,dv$$

Loi du minimum d'une v.a. ayant une densité et d'une constante

$$\begin{aligned} dF_y(v) &= 1_{\{v<\alpha(y)\}}\,\lambda(y,v)\,e^{-\int_0^v \lambda(y,s)\,ds}\,dv \\ &\quad + 1_{\{\alpha(y)<+\infty\}}\,e^{-\int_0^{\alpha(y)} \lambda(y,s)\,ds}\,\delta_{\alpha(y)}(dv) \end{aligned}$$

Loi mélange d'une densité et de masses de Dirac

Si on écrit $dF_y(v) = q_0(y)\,f_0(y,v)\,dv + \sum_{i=1}^{M(y)} q_i(y)\,\delta_{\alpha_i(y)}(dv)$ les formules sont extrêmement lourdes, mais on peut l'écrire sous la forme

$$dF_y(v) = \mathbb{P}_y(T_1 > v)\,\lambda(y,v)\,dv + \mathbb{P}_y(T_1 \geq v)\sum_{j=1}^{M(y)} p_j(y)\,\delta_{\alpha_j(y)}(dv)$$

Lois inter-arrivées avec une partie absolument continue

Loi avec densité c'est l'écriture de la loi à l'aide du taux de hasard

$$dF_y(v) = e^{-\int_0^v \lambda(y,w)\,dw}\,\lambda(y,v)\,dv$$

Loi du minimum d'une v.a. ayant une densité et d'une constante

$$\begin{aligned} dF_y(v) &= 1_{\{v<\alpha(y)\}}\,\lambda(y,v)\,e^{-\int_0^v \lambda(y,s)\,ds}\,dv \\ &\quad + 1_{\{\alpha(y)<+\infty\}}\,e^{-\int_0^{\alpha(y)} \lambda(y,s)\,ds}\,\delta_{\alpha(y)}(dv) \end{aligned}$$

Loi mélange d'une densité et de masses de Dirac on peut l'écrire

$$dF_y(v) = \mathbb{P}_y(T_1 > v)\,\lambda(y,v) + \mathbb{P}_y(T_1 \geq v)\sum_{j=1}^{M(y)} p_j(y)\,\delta_{\alpha_j(y)}(dv)$$

Sa mesure de hasard est :

$$\frac{dF_y(v)}{\mathbb{P}_y(T_1 \geq v)} = \lambda(y,v)\,dv + \sum_{j=1}^{M(y)} p_j(y)\,\delta_{\alpha_j(y)}(dv).$$

Lois inter-arrivées avec une partie absolument continue

Si $N(y, dz, dv) = \mathbb{P}_y(T_1 > v)\,\lambda(y, v)\,\beta(y, v; dz)\,dv + n(y, dz, dv)$

alors $\rho^{y,u} = \rho_c^{y,u} + \rho_c^{y,u} * \sum_{k\geq 1} n^{*k} + n_0^{y,u} * \sum_{k\geq 0} n^{*k}$

$$\rho_c^{y,u}(dz, dv) = \mathbb{E}_{y,u}(\lambda(Z_v, A_v)\,\beta(Z_v, A_v; dz))\,dv,$$

Lois inter-arrivées avec une partie absolument continue

Si $N(y, dz, dv) = \mathbb{P}_y(T_1 > v)\,\lambda(y, v)\,\beta(y, v; dz)\,dv + n(y, dz, dv)$

alors $\rho^{y,u} = \rho_c^{y,u} + \rho_c^{y,u} * \sum_{k\geq 1} n^{*k} + n_0^{y,u} * \sum_{k\geq 0} n^{*k}$

$$\rho_c^{y,u}(dz, dv) = \mathbb{E}_{y,u}(\lambda(Z_v, A_v)\,\beta(Z_v, A_v; dz))\,dv,$$

Dans le cas de lois mélange d'une densité et de masses de Dirac

- $\rho_c^{y,u}$ est l'intensité du processus ponctuel marqué construit à partir des sauts qui ne sont pas dûs à des masses de Dirac.
- $\rho_c^{y,u} * \sum_{k\geq 0} n^{*k}$ est l'intensité du processus ponctuel marqué construit à partir des sauts qui sont dûs à des masses de Dirac et qui ont lieu après un saut qui n'est pas dû à une masse de Dirac.
- $n_0^{y,u} * \sum_{k\geq 0} n^{*k}$ est l'intensité du processus ponctuel marqué construit à partir des sauts qui sont dûs à des masses de Dirac depuis l'instant initial.

Lois inter-arrivées avec une partie absolument continue

L'intensité du processus ponctuel marqué est intéressante en elle-même : elle permet de calculer certains nombres moyens d'événements survenus sur $[0, t]$ à condition que ceux-ci aient lieu lors d'instants T_n.

Par exemple pour le château d'eau, le nombre moyen de pannes de la pompe, de démarrages, ...

Lois inter-arrivées avec une partie absolument continue

Si $N(y, dz, dv) = \mathbb{P}_y(T_1 > v)\,\lambda(y, v)\,\beta(y, v; dz)\,dv + n(y, dz, dv)$

alors $\rho^{y,u} = \rho_c^{y,u} + \rho_c^{y,u} * \sum_{k\geq 1} n^{*k} + n_0^{y,u} * \sum_{k\geq 0} n^{*k}$

$$\rho_c^{y,u}(dz, dv) = \mathbb{E}_{y,u}(\lambda(Z_v, A_v)\,\beta(Z_v, A_v; dz))\,dv,$$

Rappel :

$$(P_t\varphi)(y, u) =_{def} \mathbb{E}_{y,u}(\varphi(Z_t, A_t))$$

$$= \varphi(y, u) + \int_0^t P_v \partial_2 \varphi\,(y, u)\,dv$$

$$+ \int_{(F\times\mathbb{R}_+)^2} 1_{\{v+v_1\leq t\}}\,(\varphi(z_1, 0) - \varphi(z, v_1))\,N(z, dz_1, dv_1)\,\rho^{y,u}(dz, dv)$$

$$+ \int_{F\times]0,t]} (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u + v))\,N_0^{y,u}(dz, dv)$$

Lois inter-arrivées avec une partie absolument continue

Si $N(y,dz,dv) = \mathbb{P}_y(T_1 > v)\,\lambda(y,v)\,\beta(y,v;dz)\,dv + n(y,dz,dv)$

alors $\rho^{y,u} = \rho_c^{y,u} + \rho_c^{y,u} * \sum_{k\geq 1} n^{*k} + n_0^{y,u} * \sum_{k\geq 0} n^{*k}$

$$\rho_c^{y,u}(dz,dv) = \mathbb{E}_{y,u}(\lambda(Z_v,A_v)\,\beta(Z_v,A_v;dz))\,dv,$$

d'où :

$$\mathbb{E}_{y,u}(\varphi(Z_t,A_t)) = \varphi(y,u) + \int_0^t \mathbb{E}_{y,u}(L\varphi(Z_v,A_v))\,dv$$

$$+\mathbb{E}_{y,u}\left(\int_{F\times[0,t]} G\varphi\,(z,t-v)\,\lambda(Z_v,A_v)\,\beta(Z_v,A_v;dz)\,dv\right)$$

$$+\frac{1}{\mathbb{P}_y(T_1>u)}\,G\varphi\,(y,u+t)$$

$$-\frac{1}{\mathbb{P}_y(T_1>u)}\left(S\varphi\,(y,u) + \int_{F\times]0,u]} G\varphi\,(z,u+t-v)\,n(y,dz,dv)\right)$$

$$L\varphi\,(z,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(z,v) + \int_F (\varphi(z_1,0) - \varphi(z,v))\,\lambda(z,v)\,\beta(z,v;dz_1)$$

Cas du CSMP simple de caractéristiques λ, β, α

dF_y est la loi du minimum d'une v.a. de taux de hasard $\lambda(y, \cdot)$ et de $\alpha(y) \in \bar{\mathbb{R}}_+$

Cas du CSMP simple de caractéristiques λ, β, α

dF_y est la loi du minimum d'une v.a. de taux de hasard $\lambda(y, \cdot)$ et de $\alpha(y) \in \bar{\mathbb{R}}_+$: $n(y, dz, dv) = B(y, dz)\, \delta_{\alpha(y)}(dv)$

$$B(y, dz) = 1_{\{\alpha(y)<+\infty\}}\, e^{-\int_0^{\alpha(y)} \lambda(y,s)\, ds}\, \beta(y, \alpha(y); dz).$$

$$\mathbb{E}_{y,u}(\varphi(Z_t, A_t)) = \varphi(y, u) + \int_0^t \mathbb{E}_{y,u}(L\varphi(Z_v, A_v))\, dv$$
$$+ \mathbb{E}_{y,u}\left(\int_{F\times[0,t]} G\varphi\,(z, t-v)\, \lambda(Z_v, A_v)\, \beta(Z_v, A_v; dz)\, dv\right)$$
$$+ e^{\int_0^u \lambda(y,w)\, dw}\, G\varphi\,(y, u+t)$$

$$G\varphi\,(z_0, s) = \sum_{k\geq 0} \int_{F^{k+1}} 1_{\{\alpha(z_0)+\cdots+\alpha(z_k)\leq s\}}(\varphi(z_{k+1}, 0) - \varphi(z_k, \alpha(z_k)))$$
$$\times\ B(z_0, dz_1)\ \ldots\ B(z_k, dz_{k+1})$$

La somme ci-dessus peut être finie.

Cas du PDMP simple (dF_y : loi du min v.a. à densité et constante)

Soit $(Z_t, A_t)_{t\geq 0}$ un CSMP simple de caractéristiques λ, β, α. On pose :

$$\Phi_t = \phi(Z_t, A_t).$$

Théorème

On suppose que pour tous s, t, y et $u < \alpha(y)$:

$$\phi(y, s+t) = \phi(\phi(y,s), t), \quad \phi(y, 0) = y$$

$$\lambda(y,u) = b(\phi(y,u)), \quad \beta(y,u;dz) = Q(\phi(y,u);dz)$$

$$\alpha(\phi(y,u)) = \alpha(y) - u$$

ce qui est le cas si $\alpha(y) = \inf\{s : \phi(y,s) \in \Gamma\}$.

Alors le processus $(\Phi_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov appelé PDMP simple de caractéristiques ϕ, b, Q, α.

Cas du PDMP simple (dF_y : loi du min v.a. à densité et constante)

Soit f une fonction absolument continue telle que pour tout $y \in F$, la fonction $v \to f \circ \phi(y, v)$ soit absolument continue et telle que $f \circ \phi$ et $\partial_2 f \circ \phi$ soient bornées. Posons $\mathcal{X}_\phi f(z) = \partial_2 (f \circ \phi)(z, 0)$.

$$\mathcal{L}f(z) = \mathcal{X}_\phi f(z) + \int_F (f(z_1) - f(z))\, b(z)\, Q(z, dz_1)$$

Nous avons $f(\Phi_t) = f \circ \phi(Z_t, A_t)$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y(f(\Phi_t)) = f(y) &+ \mathbb{E}_y\left(\int_0^t \mathcal{L}f(\Phi_s)\, ds\right) \\ &+ \mathbb{E}_y\left(\int_{F \times [0,t]} \mathcal{G}f(z, t-s)\, b(\Phi_s)\, Q(\phi_s; dz)\, ds\right) \\ &+ e^{\int_0^u b(\phi(y,w))\, dw}\, \mathcal{G}f(y, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f(z_0, v) \quad = \quad & \sum_{k \geq 0} \int_{F^{k+1}} 1_{\{\alpha(z_0) + \cdots + \alpha(z_k) \leq v\}} \\ & \times [f(z_{k+1}) - f \circ \phi(z_k, \alpha(z_k))] B(z_k, dz_{k+1}) \ldots B(z_0, dz_1) \end{aligned}$$

Cas du PDMP simple (dF_y : loi du min v.a. à densité et constante)

Soit f une fonction absolument continue telle que pour tout $y \in F$, la fonction $v \to f \circ \phi(y, v)$ soit absolument continue et telle que $f \circ \phi$ et $\partial_2 f \circ \phi$ soient bornées. Posons $\mathcal{X}_\phi f(z) = \partial_2(f \circ \phi)(z, 0)$.

$$\mathcal{L}f(z) = \mathcal{X}_\phi f(z) + \int_F (f(z_1) - f(z))\, b(z)\, Q(z, dz_1)$$

Nous avons $f(\Phi_t) = f \circ \phi(Z_t, A_t)$, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y(f(\Phi_t)) = f(y) &+ \mathbb{E}_y\left(\int_0^t \mathcal{L}f(\Phi_s)\, ds\right) \\ &+ \mathbb{E}_y\left(\int_{F\times[0,t]} \mathcal{G}f(z, t-s)\, b(\Phi_s)\, Q(\phi_s; dz)\, ds\right) \\ &+ e^{\int_0^u b(\phi(y,w))\, dw}\, \mathcal{G}f(y, t)\end{aligned}$$

Si $\Phi_t = \phi(Z_t, A_t)$ n'est pas un Markov, les formules sont moins belles : Φ_s n'apparait pas dans le second membre.

Cas du PDMP simple (dF_y : loi du min v.a. à densité et constante)

$$\mathcal{G}f(z_0, v) = \sum_{k\geq 0} \int_{F^k} 1_{\{\alpha(z_0)+\cdots+\alpha(z_k)\leq v\}} B(z_0, dz_1)\dots B(z_{k-1}, dz_k)$$

$$e^{-\int_0^{\alpha(z_k)} b(\phi(y,w))\,dw} \int_F [f(z) - f\circ\phi(z_k, \alpha(z_k))]\, Q(\phi(z_k, \alpha(z_k)); dz)$$

Si pour tout $y \in F$ tel que $\alpha(y) < +\infty$:

$$f\circ\phi(y, \alpha(y)) = \int_F f(z)\, Q(\phi(y, \alpha(y)); dz), \qquad (2)$$

on a $\mathcal{G}f = 0$ et donc $\mathcal{P}_t f(y) = f(y) + \int_0^t \mathcal{P}_v \mathcal{L} f(y)\, dv$.

Si $\alpha(y) = \inf\{s : \phi(y,s) \in \Gamma\}$, (2) s'écrit :

$$\forall x \in \Gamma, \quad f(x) = \int_F f(z)\, Q(x, dz).$$

Cas du PDMP simple (dF_y : loi du min v.a. à densité et constante)

$$\mathbb{E}_y(f(\Phi_t)) = f(y) + \mathbb{E}_y\left(\int_0^t \mathcal{L}f\,(\Phi_v)\,dv\right)$$

$$+\ \mathbb{E}_y\left(\int_{F\times[0,t]} \mathcal{G}f\,(z,t-v)\,b(\Phi_v)\,Q(\Phi_v;dz)\,dv\right)$$

$$+\ e^{\int_0^u b(\phi(y,w))\,dw}\,\mathcal{G}f\,(y,u+t)$$

Les termes en bleu s'interprètent comme

$$\mathbb{E}_y\left(\sum_{s:s\leq t, A_{s\_}=\alpha(Z_{s\_})} \int_F (f(z)-f(\Phi_{s\_}))\,Q(\Phi_{s\_};dz)\right)$$

et $A_{s\_} = \alpha(Z_{s\_})$ signifie que l'instant s est un instant de saut dû à une masse de Dirac.

Ce résultat est implicitement dans le livre de Davis (avec une approche martingale) mais sans formule analytique et dans un cadre moins général.

Cas du PDMP simple (dF_y : loi du min v.a. à densité et constante)

Soit μ_s la loi de Φ_s. On obtient dans le cas sans Dirac

$$\int_F f(z)\,\mu_t(dz) = \int_F f(z)\,\mu_0(dz) + \int_0^t ds \int_F (\mathcal{L}f)(z)\,\mu_s(dz)$$

pour f appartenant à une classe "assez large."

Ces équations pour $t \leq T$ caractérisent les μ_s, $s \leq T$ si :
les caractéristiques b, Q sont continues et l'évolution déterministe ϕ est solution d'un système d'équations différentielles avec vitesse localement lipschitzienne

C. Cocozza-Thivent, R. Eymard, S. Mercier, M. Roussignol *Characterisation of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Volume 2006, Article ID 92156, 1-18, doi:http://dx.doi.org/10.1155/JAMSA/2006/92156.

Cas du PDMP simple (dF_y : loi du min v.a. à densité et constante)

Soit μ_s la loi de Φ_s. On obtient dans le cas général

$$\begin{aligned}\int_F f(z)\,\mu_t(dz) &= \int_F f(z)\,\mu_0(dz) + \int_0^t ds \int_F (\mathcal{L}f)(z)\,\mu_s(dz)\\ &+ \int_0^t ds \int_{F^2} (\mathcal{G}f)(z_1, t-s)\,Q(z, dz_1)\,b(z)\,\mu_s(dz)\\ &+ \int_F (\mathcal{G}f)(z,t)\,\mu_0(dz)\end{aligned}$$

pour f appartenant à une classe "assez large."

Sous quelles hypothèses ces équations caractérisent les μ_s ?

... au moins dans le cas des CSMP (donc avec ϕ solution du système différentiel avec vitesse $v = (0,1)$)

Peut-on en déduire des algorithmes numériques de résolution ?

Cas du PDMP simple (dF_y : loi du min v.a. à densité et constante)

Soit μ_s la loi de Φ_s. On obtient dans le cas général

$$\int_F f(z)\,\mu_t(dz) = \int_F f(z)\,\mu_0(dz) + \int_0^t ds \int_F (\mathcal{L}f)(z)\,\mu_s(dz)$$
$$+ \int_0^t ds \int_{F^2} (\mathcal{G}f)(z_1, t-s)\,Q(z, dz_1)\,b(z)\;\mu_s(dz)$$
$$+ \int_F (\mathcal{G}f)(z,t)\,\mu_0(dz)$$

pour f appartenant à une classe “assez large.”

Sous quelles hypothèses ces équations caractérisent les μ_s ?

... au moins dans le cas des CSMP (donc avec ϕ solution du système différentiel avec vitesse $v = (0,1)$)

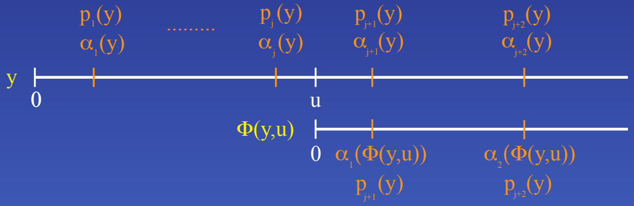
Peut-on en déduire des algorithmes numériques de résolution ?

Dans le cas particulier d’un processus de renouvellement alterné avec une seule masse de Dirac, Robert Eymard dit ”oui”.

Dans le cas général : ”probablement”

PDMP avec lois inter-arrivées mélange d'une densité et de masses de Dirac

On peut montrer que $\Phi_t = \phi(Z_t, A_t)$ est un processus de Markov sous les mêmes hypothèses que pour un PDMP simple à condition de remplacer $\alpha(\phi(y,u)) = \alpha(y) - u$ par une condition plus générale mais naturelle



L'opérateur $\mathcal{G}$ "retraçant la succession des sauts dûs à des masses de Dirac" se généralise sans problème et les formules sur le semi-groupe sont les mêmes que pour un PDMP simple.

Plan

Essai de caractérisation des mesures stables des PDMP CN

Condition nécessaire à partir de la généralisation de $\mathcal{P}'_t = \mathcal{P}_t\,\mathcal{L}$

On suppose la mesure π stationnaire.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \int_F \mathcal{L}f(z)\,\pi(dz) + \frac{1}{t}\int_{F^2}\left(\int_0^t (\mathcal{G}f)(z_1,s)\,ds\right)Q(z,dz_1)\,b(z)\,\pi(dz) \\ & + \frac{1}{t}\int_F (\mathcal{G}f)(z,t)\,\pi(dz). \end{aligned}$$

D'où, sous des conditions "d'intégrabilité", mais sans condition de type "frontière" :

$$\int_F \mathcal{L}f(z)\,\pi(dz) + \int_{F^2} (\mathcal{G}f)(z_1,\infty)\,Q(z,dz_1)\,b(z)\,\pi(dz) = 0$$

Résultat présent dans Davis avec des conditions d'intégrabilité moins fortes mais pour des PDMP moins généraux et sans forme explicite du deuxième terme.

Essai de caractérisation des mesures stables des PDMP cs

Condition suffisante : généralisation de $\mathcal{P}_t' = \mathcal{L}\mathcal{P}_t$?

Dans le cas sans Dirac, on a pour presque tout u (y et t fixés) :

$$\mathcal{P}_t\mathcal{L} f\left(\phi(y,u)\right) = \mathcal{L}\mathcal{P}_t f\left(\phi(y,u)\right)$$

pour f appartenant à une classe “assez large.”

Lorsque les caractéristiques ϕ, b et Q sont continues, c'est vrai pour tout u et on retrouve les résultats de Jacobsen sur la caractérisation des probabilités stationnaires.

Essai de caractérisation des mesures stables des PDMP CS

Condition suffisante : généralisation de $\mathcal{P}'_t = \mathcal{L}\mathcal{P}_t$?

Lorsqu'il y a des masses de Dirac on ne peut écrire $\mathcal{L}\mathcal{P}_t f$ car $u \to \mathcal{P}_t f\,(\phi(y,u))$ n'est pas absolument continue. Il faut remplacer $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}_m$ (dérivation au sens de Stieltjes).

Dans le cas du PDMP simple, on obtient :

$$1_{\{u<\alpha(y)\}}\,\mathcal{H}f\,(\phi(y,u),ds)\,du = 1_{\{u<\alpha(y)\}}\,\mathcal{L}_m\mathcal{P}_s f\,(y,du)\,ds.$$

où $\mathcal{H}f\,(z,ds)$ est la dérivée au sens de Stieltjes de $t \to \mathcal{P}_t f\,(z)$

C'est beau mais qu'en faire ?

Références sur l'équivalence entre la stabilité du PDMP et celle d'une certaine chaine de Markov

O.L.V. COSTA, F. DUFOUR, Stability and ergodicity of piecewise deterministic Markov processes *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 47, n°2, pp. 1053-1077, 2008.

Equivalences entre l'irréductibilité, la récurrence, les mesures invariantes du PDMP et celles d'une chaine de Markov dont le noyau est caractérisé explicitement à partir des caractéristiques du PDMP

Références sur l'équivalence entre la stabilité du PDMP et celle d'une certaine chaine de Markov

O.L.V. Costa, F. Dufour, Stability and ergodicity of piecewise deterministic Markov processes *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 47, n°2, pp. 1053-1077, 2008.

Equivalences entre l'irréductibilité, la récurrence, les mesures invariantes du PDMP et celles d'une chaine de Markov dont le noyau est caractérisé explicitement à partir des caractéristiques du PDMP qui n'est pas la chaine Y.

Références sur l'équivalence entre la stabilité du PDMP et celle d'une certaine chaine de Markov

Or pour un processus markovien de saut sur un espace fini ou dénombrable, il y a équivalence entre la stationnarité de la mesure ν pour la chaine Y et à la stationnarité de la mesure π pour le processus, ν et π étant reliés par $\pi(i) = \mathbb{E}_i(T_1)\,\nu(i)$.

O.L.V. Costa, Stationary distribution for piecewise-deterministic Markov processes, *J. Appl. Prob.*, **27**, 60-73, 1990,
repris dans :
M.H.A. Davis, *Markov Models and Optimization*, Chapman & Hall, 1993.

Références sur l'équivalence entre la stabilité du PDMP et celle d'une certaine chaine de Markov

Or pour un processus markovien de saut sur un espace fini ou dénombrable : la stationnarité de la mesure ν pour la chaine Y équivaut à la stationnarité de la mesure π pour le processus, avec $\pi(i) = \mathbb{E}_i(T_1)\,\nu(i)$.

O.L.V. Costa, Stationary distribution for piecewise-deterministic Markov processes, *J. Appl. Prob.*, **27**, 60-73, 1990,
repris dans :
M.H.A. Davis, *Markov Models and Optimization*, Chapman & Hall, 1993.

Il est montré que si ν est une probabilité stationnaire pour la chaine de Markov Y qui vérifie ..., alors la probabilité π donnée par .... est stationnaire pour le PDMP. Et inversement si π est une probabilité stationnaire pour le PDMP qui vérifie ...

Par des techniques de renouvellement markovien inspirées de Jacod

Travail sur le CSMP par des méthodes fortement inspirées de techniques développées par Jacod

J. Jacod, Théorèmes de renouvellement et classification pour les chaines semi-markoviennes, *Annales de l'I.H.P.*, section B, Vol VII, n°2, 83-129, 1971.
J. Jacod, Corrections et compléments à l'article "Théorèmes de renouvellement et classification pour les chaines semi-markoviennes", *Annales de l'I.H.P.*, section B, Vol X, n°2, 201-209, 1974.

Puis passage au PDMP

Par des techniques de renouvellement markovien inspirées de Jacod

D'une mesure invariante de la chaine vers une mesure invariante du PDMP

Théorème

On suppose que la chaine Y possède une mesure invariante ν et que la condition (CL) est satisfaite, alors la mesure π, définie par

$$\begin{aligned} \int_F h(y)\,\pi(dy) &= \int_{F\times\mathbb{R}_+} h(\phi(y,u))\,\mathbb{P}_y(T_1 > u)\,\nu(dy)\,du \\ &= \int_F \mathbb{E}_y\left(\int_0^{T_1} h(\phi(y,u))\,du\right)\nu(dy) \end{aligned}$$

est invariante pour le PDMP.

Par des techniques de renouvellement markovien inspirées de Jacod

D'une mesure invariante de la chaine vers une mesure invariante du PDMP

(CL) : il existe une suite croissante F_k de boréliens de F telle que $\cup_k F_k = F$, et telle que pour tout k, $\nu(F_k) < +\infty$ et :

$$\forall\, p \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_F \mathbb{E}_y(1_{F_k}(Y_n)\, e^{-pT_n})\, \nu(dy) = 0.$$

Si ν est une probabilité, (CL) est satisfaite.

Par des techniques de renouvellement markovien inspirées de Jacod

Récurrence

Théorème

Soit ν une mesure σ-finie sur F. On suppose la chaine Y est ν-récurrente. Alors la mesure π définie par

$$\int_F h(y)\,\pi(dy) = \int_{F\times\mathbb{R}_+} h(\phi(y,u))\,\mathbb{P}_y(T_1 > u)\,\nu(dy)\,du$$

est invariante pour le PDMP et celui-ci est π-récurrent.

Par des techniques de renouvellement markovien

D'une mesure invariante du PDMP vers une mesure invariante de la chaine

Théorème

Soit π une mesure sur F invariante pour le PDMP.
On suppose que $\lim_{t\to+\infty}\int_F \mathbb{P}_y(T_1>t)\,\pi(dy)=0$, *ce qui est le cas en particulier si π est finie.*

Alors il existe une mesure ν sur F, invariante pour la chaine Y telle que, pour toute fonction h mesurable positive définie sur F :

$$\int_F h(y)\,\pi(dy) = \int_{F\times\mathbb{R}_+} h(\phi(y,u))\,\mathbb{P}_y(T_1>u)\,\nu(dy)\,du.$$

Théorèmes limite

Si φ est positive :

$$\mathbb{E}_y(\varphi(Z_t, A_t)) = R * g\,(y,t), \tag{3}$$

$$R = \sum_{k \geq 0} N^{*k}, \quad g(z,v) = \varphi(z,v)\,\mathbb{P}_z(T_1 > v).$$

En fait $f(y,t) = \mathbb{E}_y(\varphi(Z_t, A_t))$ vérifie le système d'équations de renouvellement markovien :

$$\forall\, y \in F \quad f(y,t) = g(y,y) + \int_{F \times [0,t]} f(z, t-v)\, N(y, dz, dv).$$

(3) est une généralisation de :

$$f(t) = g(t) + \int_{[0,t]} f(t-s)\,\mu(dz) \Longrightarrow f = dU * g, du = \sum_{k \geq 0} \nu^{*k}.$$

Théorèmes limite

$$\mathbb{E}_y(\varphi(Z_t, A_t)) = R * g\,(y, t),$$

Il existe de la littérature sur le comportement asymptotique lorsque t tend vers l'infini de $R * g\,(y, t)$
Ce sont des généralisations du théorème de renouvellement de Blackwell au cas des processus de renouvellement markoviens.

- Dans les années 70 : Jacod, Kesten, Athreya, Ney, McDonald, Tweedie, Nummelin.
- En 1984 Shurenkov.
- Dans les années 90 : Alsmeyer.

Théorèmes limite

G. Alsmeyer The Markov Renewal Theorem and Related Results, *Markov Proc. Rel. Fields*, 3, 103-127, 1997.

On suppose que la chaine Y est Harris-récurrente et que ν est une mesure stationnaire pour cette chaine.

Soit g une fonction mesurable définie sur $F \times \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour ν-presque tout $y \in F$, la fonction $v \to g(y, v)$ est continue p.p. (relativement à la mesure de Lebesgue),
- il existe $\Delta > 0$ tel que

$$\int_F \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{n\Delta \leq v < (n+1)\Delta} |g(y, v)| \, \nu(dy) < +\infty.$$

Théorèmes limite

Dans le cas non arithmétique, notamment lorsque les lois inter-arrivées ont une partie absolument continue :
pour ν presque tout y :

$$R * g\,(y,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_{F\times\mathbb{R}_+} g(y,v)\,dv\,\nu(dy)}{\displaystyle\int_F \mathbb{E}_y(T_1)\,\nu(dy)}$$

Si g est bornée et si la chaine est Y est récurrente positive, il n'y a pas de p.p.

Théorèmes limite

Dans le cas non arithmétique, notamment lorsque les lois inter-arrivées ont une partie absolument continue :
pour ν presque tout y :

$$R * g\,(y,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_{F\times\mathbb{R}_+} g(y,v)\,dv\,\nu(dy)}{\displaystyle\int_F \mathbb{E}_y(T_1)\,\nu(dy)}$$

En prenant $g(z,v) = f(\phi(z,v))\,\mathbb{P}_z(T_1 > v)$:

$$\mathbb{E}_y(f(\Phi_t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_{F\times\mathbb{R}_+} f(\phi(y,v))\,\mathbb{P}_y(T_1 > v)\,dv\,\nu(dy)}{\displaystyle\int_F \mathbb{E}_y(T_1)\,\nu(dy)}$$

Théorèmes limite

Dans le cas non arithmétique, notamment lorsque les lois inter-arrivées ont une partie absolument continue :
pour ν presque tout y :

$$R * g\,(y,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_{F\times\mathbb{R}_+} g(y,v)\,dv\,\nu(dy)}{\displaystyle\int_F \mathbb{E}_y(T_1)\,\nu(dy)}$$

Il existe une version pour le cas arithmétique
G. Alsmeyer On the Markov Renewal Theorem, *Stoch. Proc. Appl.*, 50, 37-56, 1994.
une version corrigée en 1998 sur http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/alsmeyer/Publikationen/

Plan

Construction

Généralisation d'un PDMP simple avec frontière en remplaçant les processus déterministes par des processus aléatoires

On remplace ϕ

$$\phi(y, t+s) = \phi(\phi(y,s),t), \quad \phi(y,0) = y$$

par ζ

$$\zeta \text{ processus de Markov}, \quad \zeta^y(0) = y,$$

$$\begin{aligned}
\phi(y,v) &\rightarrow \zeta^y(v) \\
\alpha(y) = \inf\{t : \phi(y,t) \in \Gamma\} &\rightarrow \alpha(\zeta^y) = \inf\{t : \zeta^y(t) \in \Gamma\} \\
N(y, dz, dv) &\rightarrow M(\zeta^y, dz, dv) \\
\Phi_t = \phi(Z_t, A_t) &\rightarrow \Psi_t = \zeta^{Z_t}(A_t)
\end{aligned}$$

Quelques résultats

- formule de passage du processus piloté au CSMP : $\Psi_t = \zeta^{Z_t}(A_t)$ est une fonction aléatoire de (Z_t, A_t), cependant :
$$\mathbb{E}(f(\Psi_t)) = \mathbb{E}(\varphi(Z_t, A_t)),$$
$$\varphi(z, v) = \frac{\mathbb{E}(f(\zeta^z(v))\, M(\zeta^z, F\times]v, +\infty]))}{\mathbb{E}(M(\zeta^z, F\times]v, +\infty[))}$$
- la frontière Γ n'introduit pas de masses de Dirac, c'est-à-dire pas des complications dans les formules, si pour tout y la loi du temps d'atteinte de Γ par ζ^y admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue
- les Y_n, T_n servant à la construction forment processus de renouvellement markovien donc Ψ est un processus semi-régénératif d'où des résultats sur son comportement asymptotique

Quelques résultats

- Ψ est un processus de Markov
- des essais d'écriture des équations sur le semi-groupe dans des cas particuliers (brouillon)
- processus décomposable : méthode de réduction de variance pour le calcul de $\mathbb{P}(\sigma > t)$, où σ est le temps d'entrée dans un ensemble
- stabilité par "passage des composants au système" : si Ψ^1 et Ψ^2 sont deux processus pilotés indépendants, (Ψ^1, Ψ^2) est un processus piloté
- nombre moyen d'entrées dans un ensemble : propriété du PRM (Y, T)

Plan

Bilan sur la méthodologie

Le travail sur les processus semi-markoviens complétés permet :

- de se faire la main sur un PDMP facile (la fonction ϕ est très simple),
- d'obtenir des résultats sur des PDMP généraux,
- de séparer les propriétés liées au renouvellement markovien et celles liées à l'évolution déterministe,
- de faire bénéficier l'étude des PDMP des recherches sur le renouvellement markovien,
- de travailler sur des PDP (processus déterministes par morceaux non nécessairement markoviens), et un peu sur les processus à sauts pilotés.

Bilan sur la méthodologie

Dans les sujets étudiés, le fait d'avoir une loi inter-arrivées mélange d'une loi à densité et "d'autre chose" (combinaison de masses de Dirac pour l'étude des PDMP) :

- ne complique en général pas, à condition de bien écrire le mélange,
- peut être utile pour la programmation.

Quelques thèmes de recherche

Lorsqu'il y a des masses de Dirac :

- l'équation

$$\begin{aligned}\int_F f(z)\,\mu_t(dz) &= \int_F f(z)\,\mu_0(dz) + \int_0^t ds \int_F (\mathcal{L}f)(z)\,\mu_s(dz) \\ &+ \int_0^t ds \int_{F^2} (\mathcal{G}f)(z_1, t-s)\,Q(z, dz_1)\,b(z)\;\mu_s(dz) \\ &+ \int_F (\mathcal{G}f)(z,t)\,\mu_0(dz)\end{aligned}$$

  pour $t \leq T$ caractérise-t-elle les lois marginales μ_s du PDMP pour $s \leq T$?

- peut-on déduire de cette équation des algorithmes de simulation numérique de calcul des lois marginales et démontrer leur convergence ?

Quelques thèmes de recherche

- l'équation
$$\int_F \mathcal{L}f(z)\,\pi(dz) + \int_{F^2} (\mathcal{G}f)(z_1,\infty)\,Q(z,dz_1)\,b(z)\,\pi(dz) = 0$$
caractérise-t-elle les mesures stationnaires du PDMP ?
- peut-on déduire de cette équation des algorithmes de simulation numérique de calcul des mesures stationnaires et démontrer leur convergence ?
- numériquement, vaut-il mieux rechercher des mesures stationnaires avec cette équation ou à partir des mesures stationnaires de la chaine Y ?
- trouver une généralisation de $\mathcal{P}_t' = \mathcal{L}\mathcal{P}_t$ qui soit utile.

Poursuivre la piste esquissée sur les processus à sauts pilotés.

Pour plus de détails :

http://perso-math.univ-mlv.fr/users/cocozza.christiane/recherche-page-perso/RMetPDMP.pdf

c'est gratuit !